Opérations sur les vecteurs

A. Addition des vecteurs

On peut définir une addition des vecteurs qui a des propriétés semblables à celles de l'addition des nombres.

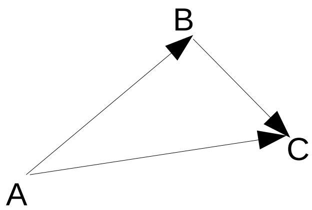
1- Définition

> Dans le plan muni du repère (O,I,J) on considère les vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(a', b')$.
> On appelle $\vec{u}+\vec{v}$ le vecteur de coordonnées (*a*+*a*', *b*+*b*').

Remarque
Effectuer une translation de vecteur $\vec{u}$ suivie d'une translation de vecteur $\vec{v}$ revient à effectuer une translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.

2- Interprétation géométrique

a) Relation de Chasles



> Quels que soient les points *A*, *B* et *C* : $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

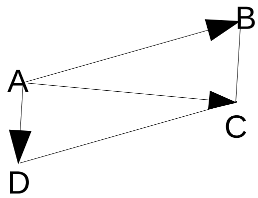
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

Remarque
On peut interpréter la relation de Chasles de la façon suivante : effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à effectuer une translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Attention
La relation de Chasles $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ (qui concerne des vecteurs) est vraie quels que soient les points *A*, *B* et *C*.
La relation *AB* + *BC* = *AC* (qui concerne des distances) n'est vérifiée que si le point *B* est sur le segment [*AC*]; de manière générale on ne peut affirmer que $AB + BC \geqslant AC$.

b) Règle du parallélogramme

> Quels que soient les points *A*, *B*, *C* et *D* non alignés :
> Si *ABCD* est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.
> Et réciproquement,
> si $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ alors *ABCD* est un parallélogramme.



Dans un parallélogramme, lorsqu'on considère les vecteurs issus d'un même sommet, la somme des vecteurs portés par les côtés est égale au vecteur porté par la diagonale.
Pour construire la somme de vecteurs issus d'un même point, on utilise un parallélogramme.

3- Propriétés de l'addition des vecteurs

L'addition des vecteurs a des propriétés semblables à celles de l'addition des nombres réels.

a) Suite d'additions de vecteurs

Lorsqu'on effectue une somme de plusieurs vecteurs, on peut modifier l'ordre des termes ou regrouper plusieurs termes sans modifier le résultat.

b) Vecteur nul

Pour tout point *A*, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul; on le note $\vec{0}$ et ses coordonnées sont (0,0).
On ne modifie pas un vecteur en lui ajoutant le vecteur nul.

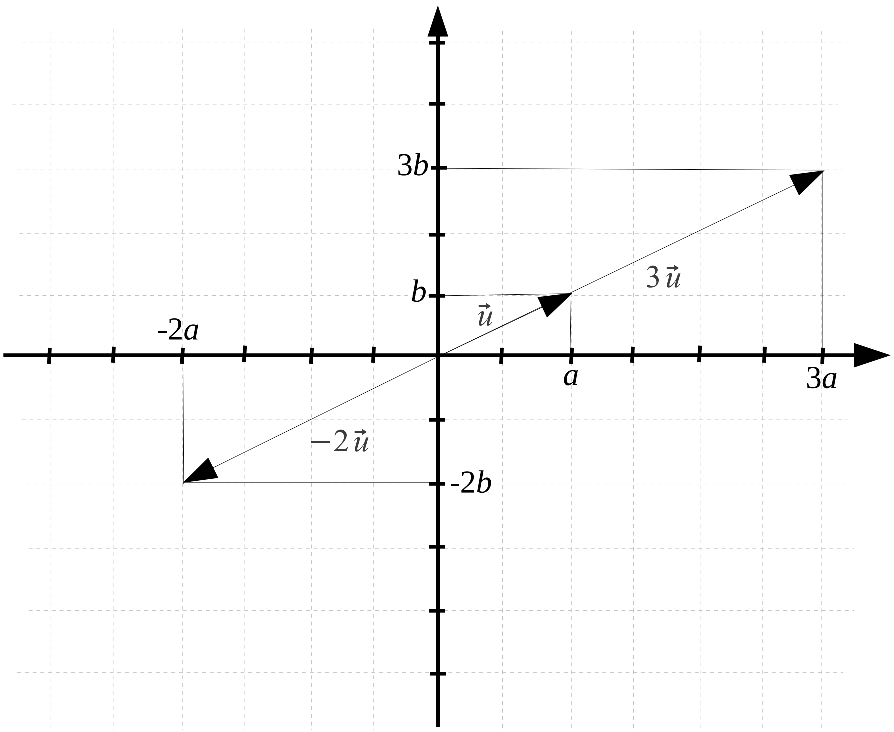
c) Vecteurs opposés

Deux vecteurs sont opposés lorsque leur somme est égale au vecteur nul, ils ont alors même longueur et même direction mais des sens différents.
Ainsi, quels que soient les points *A* et *B*, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés.
On écrit : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

d) Soustraction des vecteurs

Pour soustraire un vecteur il suffit d'ajouter son opposé.
Quels que soient les points *A*, *B* et *C*, $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

B. Multiplication d'un vecteur par un réel



Le vecteur $\vec{u}+\vec{u}+\vec{u}$ peut s'écrire $3\vec{u}$.
Le vecteur $(-\vec{u})+(-\vec{u})$ peut s'écrire $-2\vec{u}$.

1- Définition

> Dans le plan muni d'un repère (O,I,J) on considère le vecteur $\vec{u}(a,b)$ et un nombre réel *k*.
> On appelle $k\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (*ka*, *kb*).

Interprétation géométrique

Pour multiplier un vecteur non nul par un nombre réel *k*:

- on conserve la direction du vecteur
- on multiplie la longueur du vecteur par |*k*| (valeur absolue de *k*)
- si *k* est positif, on conserve le sens du vecteur, mais si *k* est négatif on le change.

2- Propriétés

Considérons deux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$, ainsi que deux nombres réels *x* et *y*.
Les égalités suivantes sont vérifiées :

- $x(y\overrightarrow{\mathrm{AB}})=(xy)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
- $x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x+y)\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
- $x(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+x\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

Ces propriétés montrent que le calcul vectoriel est très voisin du calcul sur les nombres.

3- Repère défini par des vecteurs

Soit (O,I,J) un repère orthonormal.
En posant $\vec{i}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$, on peut définir le repère (O,I,J) en donnant $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$.
On a alors l'équivalence suivante :

> Dans le plan muni du repère $(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j})$, le point M a pour coordonnées (x, y) si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=x\vec{i}+y\vec{j}$.

C. Vecteurs colinéaires

1- Définition

> On dit que deux vecteurs sont colinéaires lorsqu'on peut passer de l'un à l'autre en effectuant une multiplication par un réel.

Ainsi deux vecteurs colinéaires ont même direction (sont parallèles), le sens et la longueur pouvant être différents.

Exemple

On donne $\vec{u}$ (6, 9) et $\vec{v}$ (8, 12). Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
On cherche un réel *k* tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

On doit avoir à la fois $\begin{cases}6k=8\\9k=12\end{cases}$ soit $\begin{cases}k=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}\\k=\dfrac{12}{9}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$. Ainsi $\vec{v}=\dfrac{4}{3}\vec{u}$.

2- Droites parallèles

> Soient A, B, C et D quatre points avec A ≠ B et C ≠ D.
> Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

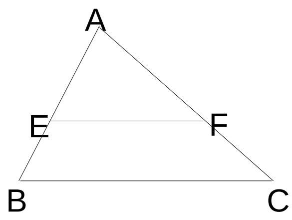
Ainsi, il suffit de trouver un nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{CD}=k\overrightarrow{AB}$ pour démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3- Points alignés

> Soient A, B et C trois points deux à deux distincts.
> Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, alors les points A, B et C sont alignés.

Ainsi, il suffit de trouver un nombre réel *k* tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ pour démontrer que les points A, B et C sont alignés.

Exemple d'application



On considère un triangle ABC, ainsi que les points E et F définis par $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$.

Démontrons que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

Pour démontrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles, nous allons montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ (utilisation de l'énoncé)

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$ (propriété de la multiplication)

$\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ (relation de Chasles)

L'égalité $\overrightarrow{EF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ montre que les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires, donc que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.