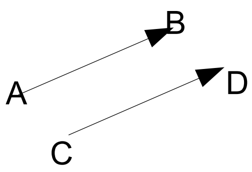
Vecteurs et coordonnées

A. Vecteurs égaux

Un vecteur est un objet mathématique qui est caractérisé par 3 informations : une longueur, une direction, un sens.

On représente en général les vecteurs sous forme de flèches, mais un vecteur peut avoir plusieurs représentants.



Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, en effet ils ont :

- même longueur : $AB = CD$
- même direction : $(AB) // (CD)$
- même sens : le sens de A vers B est le même que le sens de C vers D.

Cas particulier

Le vecteur qui a une longueur nulle est appelé vecteur nul et on le note $\vec{0}$. Ce vecteur n'a ni direction, ni sens.

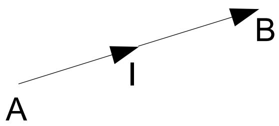
Pour tout point A du plan, $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont même longueur, même direction et même sens.

B. Propriétés

1- Vecteurs et milieu d'un segment

Considérons trois points A, I et B.



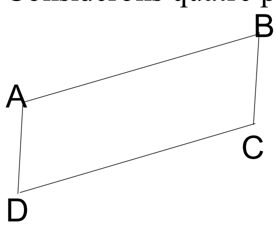
Si le point I est le milieu du segment [AB], alors $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

Réciproquement,

Si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$, alors I est le milieu du segment [AB].

2- Vecteurs et parallélogramme

Considérons quatre points A, B, C et D.



Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

Réciproquement,

si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, alors ABCD est un parallélogramme.

Attention

Il ne faut pas oublier de tenir compte du sens des vecteurs : pour le parallélogramme ABCD, l'égalité de vecteurs est $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ et non $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

Remarque 1

Dans le cas où les points A, B, C et D sont alignés, on dit que le parallélogramme ABCD est aplati.

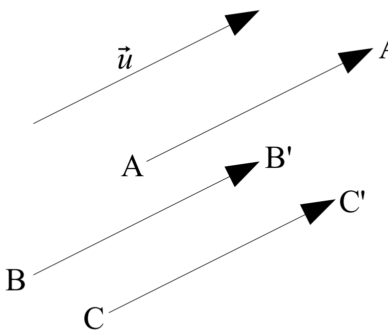
Remarque 2
Le parallélogramme ABCD peut aussi être nommé BCDA, CDAB, DABC, ADCB, DCBA, CBAD ou BACD. Chaque façon de le nommer fournit une nouvelle égalité vectorielle; on a finalement les 4 égalités suivantes :
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CB}$
Si l'une de ces 4 égalités est vérifiée, les 3 autres le sont aussi.

C. Translation

Une translation est une fonction qui consiste à déplacer un point d'une longueur donnée, dans une direction et dans un sens donnés. On définit donc une translation à l'aide d'un vecteur.

> Une translation de vecteur $\vec{u}$ est une fonction qui transforme tout point M du plan en un point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{u}$.

Exemple

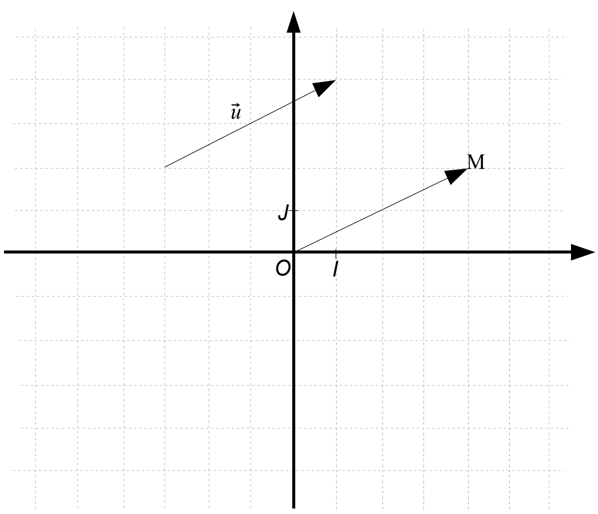


Soit t la translation de vecteur $\vec{u}$.
On a sur la figure : t(A)=A', t(B)=B' et t(C)=C'.
Cela se traduit par :
$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\vec{u}$

D. Coordonnées d'un vecteur

1- Définition

> Lorsque le plan est muni d'un repère (O,I,J), on appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
> Deux vecteurs qui ont les mêmes coordonnées sont égaux.



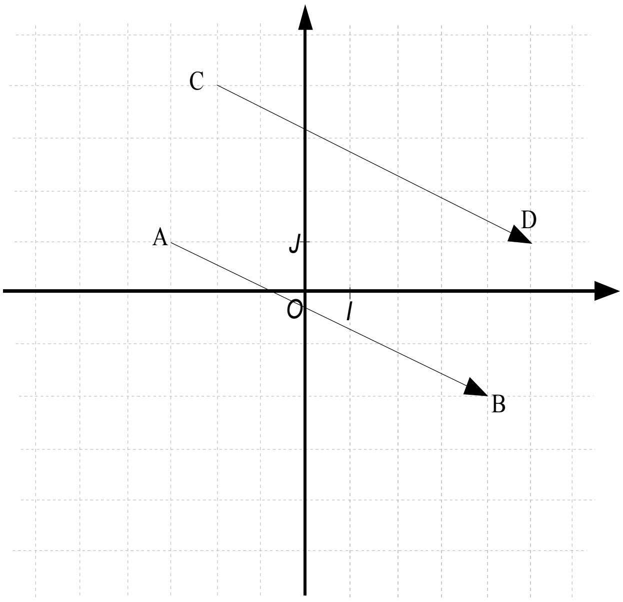
Sur la figure on a construit le point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.
Comme les coordonnées de M sont (4,2), les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont aussi (4,2).

Pour lire graphiquement les coordonnées d'un vecteur, on lit les coordonnées de son extrémité en faisant comme si son origine était l'origine du repère.

2- Coordonnées du vecteur défini par deux points

Dans le plan muni du repère (O,I,J) on considère les points A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B).
Les coodonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont ($x_B - x_A$, $y_B - y_A$).

Exemple



Dans le plan muni du repère (O,I,J) on donne les points A(-3,1), B(4,-2), C(-2,4) et D(5,1). Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Que peut-on en déduire ?

a) Coordonnées de $\overrightarrow{AB}$:
$x_B - x_A = 4 - (-3) = 7$
$y_B - y_A = -2 - 1 = -3$
donc $\overrightarrow{AB}$ (7, -3)
b) Coordonnées de $\overrightarrow{CD}$:
$x_D - x_C = 5 - (-2) = 7$
$y_D - y_C = 1 - 4 = -3$
donc $\overrightarrow{CD}$ (7, -3)
c) Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont les mêmes coordonnées, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.