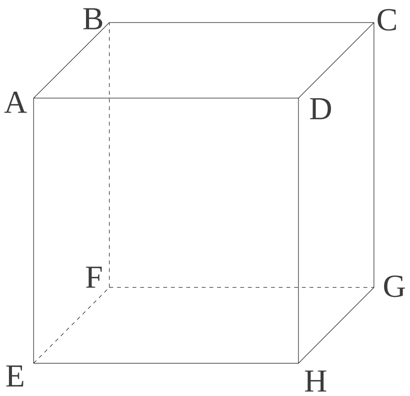
Des solides dans l'espace

A. Représentation en perspective cavalière

Voici la représentation en perspective cavalière d'un cube ABCDEFGH.
Essayons de mettre en évidence les règles utilisées.



Un cube a 6 faces qui sont des carrés.
On trouve :
- les faces de devant (AEHD) et de derrière (BFGC)
- les faces de droite (DHGC) et de gauche (AEFB)
- les faces de dessus ((ABCD) et de dessous (EFGH)
Sur la figure :
- les faces de dessus et de dessous sont horizontales, les autres faces sont verticales.
- les faces de devant et de derrière sont représentées en vraie grandeur par des carrés.

Cependant :

- La face ABCD du cube est aussi un carré, pourtant sa représentation en perspective cavalière a la forme d'un parallélogramme qui n'est pas un carré.
- L'angle $\widehat{BAD}$ est droit sur le cube mais aigu sur la figure.
- Les arêtes [AB] et [CD] ont même longueur sur le cube mais on les a représentées par des segments de longueurs différentes.

Il faut donc bien distinguer le cube et sa représentation, la réalité et ce qu'on voit sur la figure.
Pour faire correctement une représentation en perspective cavalière il faut respecter un certain nombre de règles.

> 1- Des segments parallèles sont représentés par des segments parallèles.
>
> 2- Les alignements et les rapports de longueurs entre points alignés doivent être conservés.
>
> 3- Les arêtes cachées sont dessinées en pointillés.

La règle 1 explique pourquoi les faces carrées du cube sont représentées par des parallélogrammes.
La règle 2 implique que le milieu d'un segment se trouve aussi au milieu sur la représentation.
La règle 3 nous permet de distinguer les parties qui se trouvent au premier plan.

Attention
Les longueurs et les angles sont souvent modifiés par les représentations en perspective cavalière. Seules les parties vues de face dans un plan vertical sont représentées en vraie grandeur.

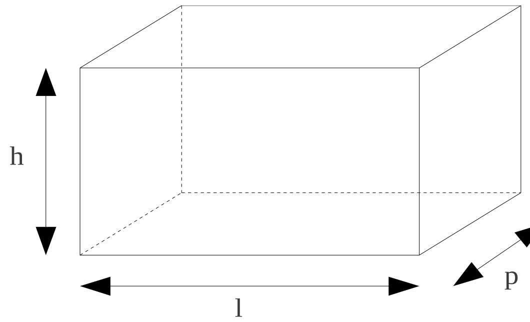
B. Solides à faces planes

Les solides délimités par des faces planes sont appelés des polyèdres.

1- Parallélépipède rectangle

> Un parallélépipède rectangle, ou pavé droit, est un solide délimité par 6 faces rectangulaires.
> Il a 3 dimensions : largeur, hauteur et profondeur.

Cas particulier
Le cube est un pavé droit dont les 6 faces sont carrées, ses trois dimensions sont égales.



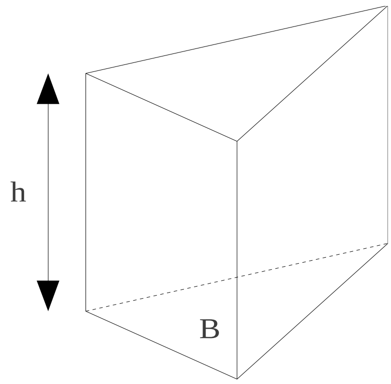
Le volume d'un pavé droit est égal au produit de ses trois dimensions.

$$V = l \times h \times p$$

Pour un cube d'arête c, $V = c \times c \times c = c^3$
C'est pourquoi « c puissance 3 » se dit aussi « c au cube ».

2- Prisme droit

> Un prisme droit est un solide délimité par deux faces polygonales (appelées bases) reliées par des faces rectangulaires (appelées faces latérales).
>
> Les deux bases sont parallèles et superposables, la distance qui les sépare est la hauteur du prisme droit.



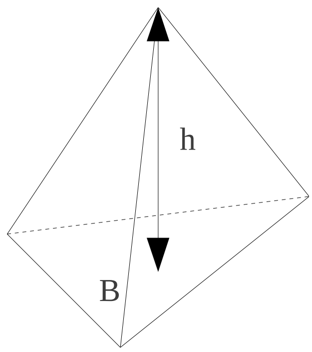
Le volume d'un prisme droit est égal au produit de l'aire des bases par la hauteur.

$$V = B \times h$$

Cas particulier
Le pavé droit est un prisme droit dont les bases sont aussi des rectangles. On peut donc calculer son volume en multipliant l'aire d'une des faces par la 3ème dimension.

3- Pyramide

> Une pyramide est délimitée par une face polygonale (appelée base) reliée à un point (appelé sommet) par des faces triangulaires (appelées faces latérales).
>
> La distance qui sépare le sommet de la base est la hauteur de la pyramide.



Le volume d'une pyramide est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

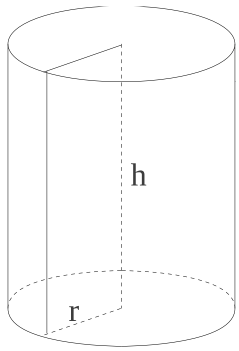
Le volume d'un prisme droit est trois fois plus grand que le volume d'une pyramide qui a même base et même hauteur.

Cas particulier
1- Une pyramide à base triangulaire est aussi appelé tétraèdre ; elle a 4 faces, c'est le nombre minimal de faces pour former un solide.
2- On dit qu'une pyramide est régulière lorsque sa base est un polygone régulier et lorsque son sommet se trouve à la verticale du centre de la base.

C. Solides arrondis

1- Cylindre droit

> Un cylindre droit est délimité par deux cercles de même rayon (les bases) et une surface latérale formée par des segments reliant les bases en formant des rectangles avec le segment reliant les centres des cercles.
>
> La distance entre les centres des cercles est la hauteur du cylindre.
>
> Le rayon des deux cercles est aussi le rayon du cylindre.



Le volume d'un cylindre est égal au produit de l'aire de ses bases par sa hauteur.

$$V = B \times h$$

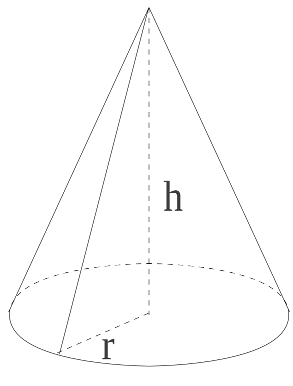
Comme les bases sont des cercles de rayon r, leur aire est πr^2.
On en déduit pour le cylindre :

$$V = \pi r^2 h.$$

Remarque : un cylindre droit peut être considéré comme un prisme droit à base circulaire.

2- Cône

> Un cône est délimité par un cercle (la base) et une surface latérale formée par des segments reliant la base à un point (le sommet) en formant des triangles rectangles avec le segment reliant le centre de la base au sommet.
>
> La distance entre le sommet et le centre de la base est la hauteur du cône.
>
> Le rayon de la base est aussi le rayon du cône.



Le volume du cône est égal au tiers du produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

$$V = \frac{B \times h}{3}$$

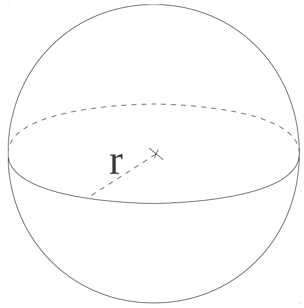
Comme la base est un cercle de rayon r, son aire est πr^2.
On en déduit pour le cône :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Remarque : le cône peut être considéré comme une pyramide à base circulaire.

3- Sphère

> Une sphère est formée par l'ensemble des points qui sont à une distance donnée d'un point appelé centre.
>
> La distance entre le centre et un point de la sphère est appelée rayon de la sphère.



Le volume d'une sphère de rayon r est :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

L'aire de la même sphère est :

$$A = 4\pi r^2$$