Inéquations

A. Ordre et opérations

1- Rappel préliminaire

> On peut connaître l'ordre de deux nombres réels a et b en déterminant le signe de leur différence $b - a$.
>
> Si $b - a$ est positif, alors $a < b$.
>
> Si $b - a$ est négatif, alors $a > b$.

2- Addition et soustraction

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$, et un nombre réel e quelconque.
Comparons $a+e$ et $b+e$.
Pour cela, cherchons le signe de leur différence $(b + e) - (a + e)$.
$(b + e) - (a + e) = b + e - a - e = b - a$.
Comme $a < b$, $b - a$ est positif, donc $(b + e) - (a + e)$ est positif et $a + e < b + e$.

> Quels que soient les réels a, b et e : si $a < b$, alors $a + e < b + e$.
>
> Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité fournit une nouvelle inégalité de même sens.

Comme soustraire un nombre revient à ajouter son opposé, on a de même :

> Quels que soient les réels a, b et e : si $a < b$, alors $a - e < b - e$.
>
> Soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité fournit une nouvelle inégalité de même sens.

3- Multiplication et division

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$, et un nombre réel k quelconque.
Comparons ka et kb.
Pour cela, cherchons le signe de leur différence $kb - ka$: $kb - ka = k(b - a)$.
Comme $a < b$, $b - a$ est positif. Le signe de $k(b - a)$ est donc le signe de k.
Si k est positif, $kb - ka$ est positif donc $ka < kb$.
Si k est négatif, $kb - ka$ est négatif donc $ka > kb$.

> Quels que soient les réels a, b et k :
>
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{k > 0}$, alors $ka < kb$.
>
> Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif** fournit une nouvelle inégalité de même sens.
>
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{k < 0}$, alors $ka > kb$.
>
> Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre **négatif** fournit une nouvelle inégalité de sens contraire.

Comme diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse, on retrouve les mêmes propriétés pour la division.

> Quels que soient les réels a, b et d, avec $d \neq 0$:
>
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{d > 0}$, alors $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$.
>
> Diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif** fournit une nouvelle inégalité de même sens.
>
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{d < 0}$, alors $\frac{a}{d} > \frac{b}{d}$.
>
> Diviser les deux membres d'une inégalité par un même nombre **négatif** fournit une nouvelle inégalité de sens contraire.

B. Application à la résolution d'inéquations simples

Une inéquation est une inégalité faisant intervenir une inconnue souvent notée x.
Résoudre une inéquation d'inconnue x consiste à déterminer l'ensemble des nombres réels x vérifiant l'inégalité.

Exemples

a) Résoudre l'inéquation $3x - 5 < 2$.
On commence par ajouter 5 aux deux membres de l'inéquation; on obtient $3x < 7$.
On divise les deux membres de l'inéquation par 3 qui est positif; l'ordre est conservé et on obtient $x < \frac{7}{3}$.

L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels inférieurs à $\frac{7}{3}$, c'est à dire l'intervalle $]-\infty; \frac{7}{3}[$.

b) Résoudre l'inéquation $x + 7 < 5x$.
On commence par soustraire $5x$ aux deux membres de l'inéquation; on obtient $-4x + 7 < 0$.
On soustrait 7 aux deux membres de l'inéquation; on obtient $-4x < -7$.
On divise les deux membres par -4 qui est négatif; l'ordre est inversé et on obtient $x > \frac{7}{4}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels supérieurs à $\frac{7}{4}$, c'est à dire l'intervalle $]\frac{7}{4}; +\infty[$.

C. Inéquations et produits

1- Rappel : règle des signes pour les produits

> Le produit de deux nombres de même signe est positif.
>
> Le produit de deux nombres de signes différents est négatif.

Cette propriété permet de résoudre les inéquations du type f(x) $\times$ g(x) < 0 ou du type f(x) $\times$ g(x) > 0. Il s'agit à chaque fois d'étudier le signe du produit f(x) $\times$ g(x).

2- Utilisation d'un tableau de signes

Pour résoudre des inéquations faisant apparaître des termes en x^2 on utilise une factorisation pour se ramener à l'étude du signe du produit de deux fonctions affines.

Exemple

Résoudre l'inéquation $(2x + 3)(-x + 5) < 0$.

Pour étudier le signe du produit de $2x + 3$ par $-x + 5$, commençons par étudier le signe de chacun des facteurs et regroupons les résultats dans un même tableau.

$2x + 3$ est une fonction affine croissante qui s'annule pour $x = -\frac{3}{2}$

et $-x+5$ est une fonction affine décroissante qui s'annule pour $x = 5$.

On obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		5		$+\infty$
2x+3		-	0	+	|	+	
-x+5		+	|	+	0	-	
(2x+3)(-x+5)		-	0	+	0	-	

On constate que le produit $(2x+3)(-x+5)$ est négatif lorsque $x < -\frac{3}{2}$ ou lorsque $x > 5$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x+3)(-x+5) < 0$ est donc la réunion des intervalles $]-\infty ; -\frac{3}{2}[$ et $]5 ; +\infty[$, soit $]-\infty ; -\frac{3}{2}[\cup]5 ; +\infty[$.