Notion de fonction

*On utilise parfois dans la vie courante l'expression « **en fonction de** » pour traduire une dépendance entre deux situations. En Mathématiques, une fonction traduit la dépendance entre deux nombres.*

A- Définitions

Une fonction f permet de transformer tout nombre x d'un ensemble D en un nombre **unique** y.
L'ensemble D est appelé *ensemble de définition* de la fonction f.
Le nombre x est une *variable* qui parcourt cet ensemble.
Le nombre y est l'*image* de x.

Exemples de fonctions

- La fonction « double » transforme x en $y = 2x$.
- La fonction « inverse » transforme x en $y = 1/x$.
- La fonction « carré » transforme x en $y = x^2$.

1. Ensemble de définition

Si une fonction est susceptible de transformer tous les nombres réels, alors son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
Il existe parfois des valeurs interdites; par exemple la fonction inverse ne peut pas transformer le nombre 0 (il est impossible de diviser 1 par 0), son ensemble de définition est $\mathbb{R}-\{0\} = \mathbb{R}^*$.
Certaines fonctions sont définies uniquement pour les nombres situés entre deux valeurs limites a et b; l'ensemble de définition est alors l'intervalle $[a; b]$.

A retenir

> Tout nombre x de l'ensemble de définition a une image y et celle-ci est unique.

2. Image d'un nombre

L'image d'un nombre x par une fonction f se note $f(x)$; on lit «f de x».
Pour désigner la fonction qui à x associe $f(x)$ on écrit $f : x \mapsto f(x)$.
On définit une fonction en indiquant un moyen de déterminer $f(x)$ lorsque x est donné; cela se fait souvent avec une formule.

Exemples

1. Soit f la fonction qui à x associe son double. On écrira $f : x \mapsto 2x$
   L'image de 5 est $2 \times 5 = 10$, on écrit $f(5) = 10$.
2. Soit g la fonction qui à x associe son carré. On écrira $g : x \mapsto x^2$
   L'image de 3 est $3^2=9$, on écrit $g(3) = 9$.
3. Considérons la fonction $h : x \mapsto x^2 - 5x$ et calculons l'image de (-4).
   Il suffit de remplacer x par (-4) dans la formule qui définit la fonction h.
   $h(-4) = (-4)^2 - 5 \times (-4) = 16 + 20 = 36$.
   L'image de (-4) est donc 36.

3. Antécédent

> Considérons une fonction f et deux réels a et b tels que $b = f(a)$.

> Nous savons que b est l'image de a. On dit alors aussi que a est **un** antécédent de b.

Attention
Le nombre a n'a qu'une image mais b peut avoir plusieurs antécédents, c'est ce qui explique l'utilisation de l'article « **un** ».

Retenons
Les antécédents par une fonction f d'un réel b sont les réels dont l'image est b, ce sont donc les solutions de l'équation $f(x) = b$; leur nombre dépend de la fonction f.

Exemples

1. Considérons la fonction $f : x \mapsto x - 3$ et cherchons le ou les antécédents de 5.
   Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 5, donc de résoudre l'équation $x - 3 = 5$. Celle-ci n'a qu'une solution qui est $x = 8$, donc 5 a un unique antécédent qui est 8.

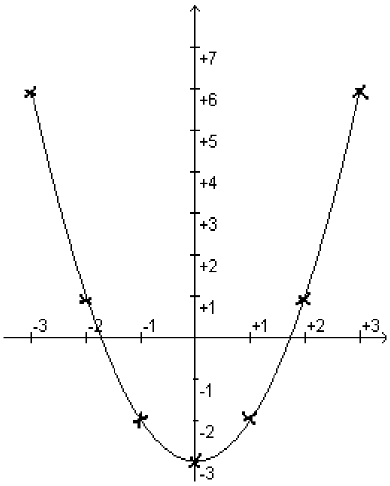
2. Considérons la fonction $g : x \mapsto x^2$ et cherchons le ou les antécédents de 25.
   Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 25, donc de résoudre l'équation $x^2 = 25$. Celle-ci a deux solutions qui sont $x = 5$ et $x = -5$, donc 25 a deux antécédents qui sont 5 et -5.

3. Considérons la fonction $h : x \mapsto x^2 + 1$ et cherchons le ou les antécédents de 0.
   Il s'agit de déterminer l'ensemble des réels x dont l'image est égale à 0, donc de résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$. Comme x^2 est toujours positif, $x^2 + 1$ est toujours supérieur ou égal à 1, il n'est donc pas possible de trouver un réel x tel que $x^2 + 1 = 0$. 0 n'a donc pas d'antécédent.

B- Représentation graphique d'une fonction

> Soit f une fonction sur l'ensemble D.
>
> Dans le plan muni d'un repère, on appelle représentation graphique de f l'ensemble des points M(x, y) pour lesquels x est élément de D et $y = f(x)$.
>
> Ces points forment la courbe d'équation $y = f(x)$.

Exemple
Considérons la fonction $f : x \mapsto x^2 - 3$ définie sur l'intervalle [-3 ; 3] et construisons sa représentation graphique.



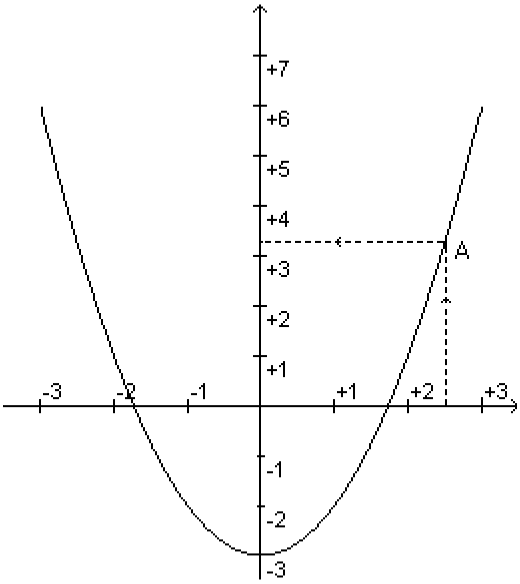
Pour effectuer cette construction nous commencerons par calculer un certain nombre d'images. Les résultats sont inscrits dans un tableau de valeurs :

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

Dans le plan muni de son repère, on place les points de coordonnées (x, $f(x)$), puis on les relie par une courbe.

Utilisation de la représentation graphique
La représentation graphique d'une fonction nous en donne une vision globale.
Elle permet par exemple de trouver des valeurs approchées d'images ou d'antécédents.

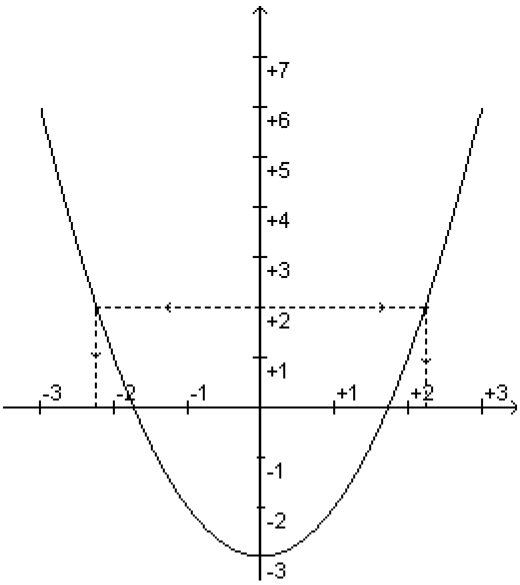
Détermination graphique de l'image de 2,5



Il suffit de déterminer le point A de la courbe dont l'abscisse (c'est *x*) est 2,5, puis de lire son ordonnée (c'est *y*).

L'ordonnée de A est environ 3,2; on en déduit que $f(2,5) \approx 3,2$.
Il ne s'agit que d'une valeur approchée, la valeur exacte obtenue par calcul étant :
$f(2,5) = 2,5^2 – 3 = 6,25 – 3 = 3,25$.

Recherche du ou des antécédents de 2



Il suffit de trouver tous les points de la courbe dont l'ordonnée (c'est *y*) est 2, puis de lire les abscisses (c'est *x*) correspondantes.

On constate que deux points de la courbe ont une ordonnée égale à 2; leurs abscisses (environ 2,2 et -2,2) sont donc les antécédents de 2.