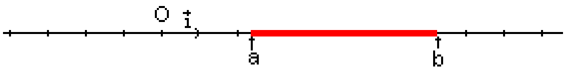
Variation des fonctions

A. Intervalles

L'ensemble des nombres réels compris entre deux nombres a et b est un intervalle fini. L'ensemble des nombres supérieurs au nombre a et l'ensemble des nombres inférieurs au nombre a sont des intervalles infinis.

1- Intervalles finis



Considérons deux nombres réels a et b, tels que a<b.

L'ensemble des nombres réels compris entre a et b est un intervalle fini qui correspond à un segment sur une droite graduée.
On peut distinguer 4 cas selon que les nombres a et b sont ou non inclus dans l'intervalle.

1er cas : l'intervalle <u>fermé</u> **[a,b]** contient les nombres compris entre a et b, les nombres a et b étant inclus ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels $\mathbf{a \leq x \leq b}$.

2ème cas : l'intervalle <u>ouvert</u> **]a,b[** contient les nombres compris entre a et b, les nombres a et b étant exclus ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a < x < b}$.

3ème cas : l'intervalle **[a,b[** contient les nombres compris entre a et b, le nombre a étant inclus, mais b étant exclu; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a \leq x < b}$.

4ème cas : l'intervalle **]a,b]** contient les nombres compris entre a et b, le nombre a étant exclu, mais b étant inclus; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a < x \leq b}$.

Remarque
C'est le sens des crochets (ouvert ou fermé) qui indique si les extrémités sont ou ne sont pas incluses dans l'intervalle.

2- Intervalles infinis

Considérons un nombre réel a.

L'ensemble des nombres réels supérieurs à a est un intervalle infini qui correspond à une demi-droite sur une droite graduée.
L'ensemble des nombres réels inférieurs à a est aussi un intervalle infini, il correspond à la deuxième demi-droite.
Pour noter les intervalles infinis on utilise le symbole ∞ qui représente l'infini.
On peut distinguer 4 cas selon que le nombre a est ou non inclus dans l'intervalle.

1er cas : l'intervalle **[a,+∞ [** contient les nombres supérieurs ou égaux à a ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels $\mathbf{a \leq x}$.

2ème cas : l'intervalle **]a, +∞ [** contient les nombres strictement supérieurs à a ; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{a < x}$.

3ème cas : l'intervalle **]-∞, a]** contient les nombres inférieurs ou égaux à a; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{x \leq a}$.

4ème cas : l'intervalle **] -∞, a [** contient les nombres strictement inférieurs à a; c'est donc l'ensemble des nombres réels x tels que $\mathbf{x < a}$.

Remarque
Les crochets sont toujours ouverts du côté de l'infini puisqu'on ne peut pas l'atteindre.

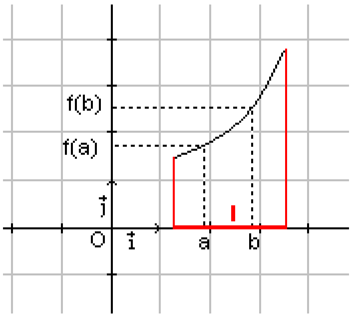
B. Sens de variation d'une fonction

1- Fonctions croissantes

> Une fonction *f* est **croissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **conserve l'ordre** des nombres.
> Quels que soient les réels *a* et *b* de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction *f* «monte» sur l'intervalle I.

Exemple



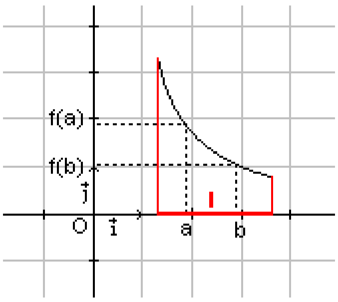
La fonction *f* est croissante sur I.
La courbe monte.
Lorsque les valeurs de *x* augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent aussi :
f conserve l'ordre des nombres.

2- Fonctions décroissantes

> Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **inverse** l'ordre des nombres.
> Quels que soient les réels *a* et *b* de I, si $a<b$ alors $f(a) > f(b)$.

Graphiquement, cela se traduit par le fait que la courbe représentative de la fonction *f* «descend» sur l'intervalle I.

Exemple

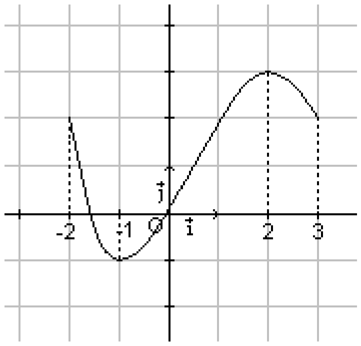


La fonction *f* est décroissante sur I.
La courbe descend.
Lorsque les valeurs de *x* augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent :
f inverse l'ordre des nombres.

3- Tableau de variation

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle D.
Pour construire le tableau des variations de la fonction *f* sur D on détermine les intervalles I contenus dans D sur lesquels *f* est monotone, c'est à dire soit croissante, soit décroissante.
On note les résultats obtenus dans un tableau où des flèches indiquent la croissance ou la décroissance de *f* .

Exemple



Considérons la fonction *f* définie sur [-2 ;3] dont la courbe représentative est dessinée.
On observe que :
a) *f* est décroissante sur [-2; -1]
b) *f* est croissante sur [1; 2]
c) *f* est décroissante sur [2; 3]
D'autre part *f* (-2)=2, *f* (-1)=-1, *f* (2)=3 et *f* (3)=2.

Tout ceci peut être résumé dans le tableau de variations suivant :

x	-2	-1	2	3
$f(x)$	2	↘ -1	↗ 3	↘ 2

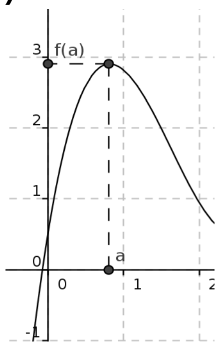
C. Maximum et minimum d'une fonction

Lorsqu'on étudie une fonction on cherche souvent ses valeurs extrêmales ; par exemple, si on s'intéresse à un bénéfice, on essaiera de faire en sorte qu'il soit maximal, par contre, on essaiera de rendre une dépense minimale.

1- Définitions

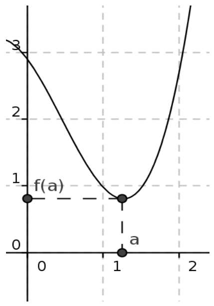
On considère une fonction *f* définie sur un intervalle I et un nombre réel *a* appartenant à I.

a) Maximum d'une fonction



On dit que $f(a)$ est un maximum de *f* sur l'intervalle I si pour tout réel *x* de I on a $f(x) \leqslant f(a)$.

b) Minimum d'une fonction



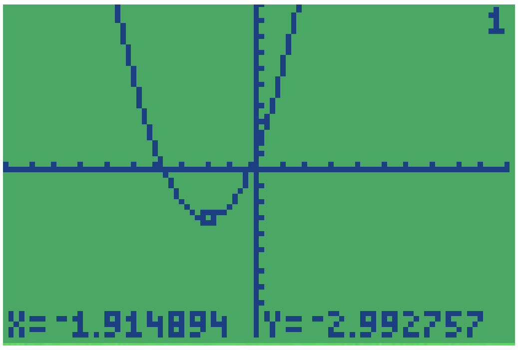
On dit que $f(a)$ est un minimum de *f* sur l'intervalle I si pour tout réel *x* de I on a $f(x) \geqslant f(a)$.

c) Extrêmum d'une fonction

On dit qu'une fonction admet un extrêmum sur l'intervalle I lorsqu'elle admet un maximum ou un minimum sur cet intervalle.

2- Etude d'un exemple

On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 4x + 1$.
1- En utilisant la calculatrice conjecturer l'existence d'un extrêmum de f sur ℝ.
2- Démontrer la conjecture précédente.



En faisant tracer la courbe représentant f sur la calculatrice on constate l'existence d'un minimum égal à -3 et atteint pour $x = -2$.

Nous allons donc démontrer que pour tout réel x, $f(x) \geqslant f(-2)$.

Pour cela calculons $f(x) - f(-2)$ et étudions son signe.
$f(x) - f(-2) = x^2 + 4x + 1 - ((-2)^2 + 4 \times (-2) + 1) = x^2 + 4x + 1 - (-3) = x^2 + 4x + 4$.
On remarque alors que $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Or un carré est toujours positif. Cela montre donc que $f(x) - f(-2) \geqslant 0$ et finalement que $f(x) \geqslant f(-2)$.
Le maximum de f sur ℝ est donc $f(-2)$, il est bien égal à -3 et est atteint pour $x = -2$.