Fonctions affines

A. Définition et premières propriétés

1- Définition

> Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction affine s'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x, $f(x) = ax + b$.

Pour calculer l'image d'un réel x, il suffit donc de multiplier x par le coefficient a, puis d'ajouter la constante b.

Exemples :

1. soit f définie par $f(x) = 2x - 5$; $f(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec $a=2$ et $b=-5$, c'est donc une fonction affine.
2. soit g définie par $g(x) = -x + 2$; on a $g(x) = -1x + 2$, $g(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec $a=-1$ et $b=2$, c'est donc une fonction affine.
3. soit h définie par $h(x)=\frac{x}{2}$; on a $h(x)=\frac{1}{2}x+0$, $h(x)$ est bien de la forme $ax + b$ avec $a=1/2$ et $b=0$, c'est donc une fonction affine.

Cas particuliers

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
Lorsque l'un des deux paramètres a et b est égal à 0, on obtient une fonction affine particulière.

Si $a = 0$, on a $f(x) = b$. La fonction f est alors appelée **fonction constante**, sa représentation graphique est une droite parallèle à l'axe des abscisses du repère (horizontale).

Si $b = 0$, on a $f(x) = ax$. La fonction f est alors appelée **fonction linéaire**, sa représentation graphique est une droite passant par l'origine du repère. Les fonctions linéaires permettent de décrire les situations de proportionnalité, le paramètre a est alors le coefficient de proportionnalité.

2- Représentation graphique d'une fonction affine

> Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.
>
> La représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère est une droite. Cette droite est appelée droite d'équation $y = ax + b$.

Remarque

Comme la représentation graphique d'une fonction affine est une droite, il suffit de construire deux points pour la tracer. Pour éviter des erreurs il est cependant conseillé de construire un troisième point qui permet d'effectuer une vérification.

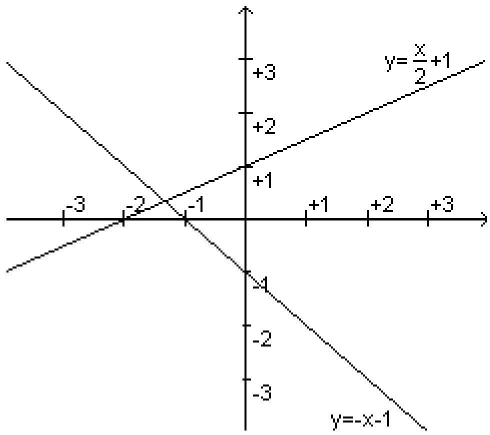
Exemples

La figure donne les représentations graphiques des fonctions affines f et g définies par :

$f(x) = \frac{x}{2} + 1$ et $g(x) = -x - 1$

Tableau de valeurs utilisé :

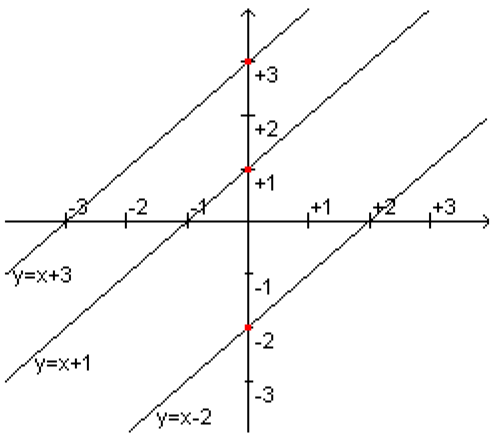
x	-2	0	2
$f(x)$	0	1	2
$g(x)$	1	-1	-3



3- Interprétation graphique des coefficients a et b

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$.

a) Ordonnée à l'origine b



Comme $f(0) = a \times 0 + b = b$, la droite représentant graphiquement la fonction f passe par le point de coordonnées $(0, b)$. C'est en ce point qu'elle coupe l'axe des ordonnées et c'est pourquoi on appelle le paramètre b ordonnée à l'origine.

> Si $f(x) = ax + b$, alors $f(0) = b$. L'ordonnée à l'origine b permet de déterminer le point d'intersection de la droite représentation graphique de f avec l'axe des ordonnées.

b) Coefficient directeur a

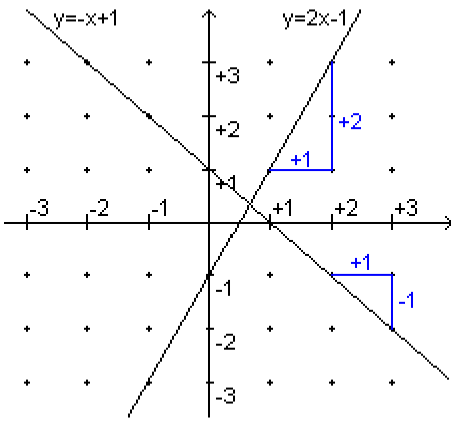
On a $f(x+1) = a(x + 1) + b = ax + a + b = ax + b + a = f(x) + a$.
Soit finalement : $f(x + 1) = f(x) + a$.

> Si $f(x) = ax + b$, alors $f(x + 1) = f(x) + a$. A chaque fois que l'on augmente x d'une unité, on augmente $f(x)$ de a unités.

Cette propriété permet de définir la direction que prend la droite d'équation $y = ax + b$, c'est pourquoi le paramètre a est appelé coefficient directeur.

Exemples

La figure donne les représentations graphiques des fonctions f et g définies par :



$f(x) = 2x - 1$ et $g(x) = -x + 1$.
Sur la droite d'équation $y = 2x - 1$, lorsqu'on s'écarte d'une unité parallèlement à l'axe des abscisses, on doit se déplacer de 2 unités parallèlement à l'axe des ordonnées pour revenir sur la droite ; 2 est le coefficient directeur.
Sur la droite d'équation $y = -x + 1$, lorsqu'on s'écarte d'une unité parallèlement à l'axe des abscisses, on doit se déplacer de -1 unité parallèlement à l'axe des ordonnées pour revenir sur la droite ; -1 est le coefficient directeur.

B. Ordre et opérations

1- Rappel préliminaire

> On peut connaître l'ordre de deux nombres réels a et b en déterminant le signe de leur différence $b - a$.
>
> Si $b - a$ est positif, alors $a < b$.
>
> Si $b - a$ est négatif, alors $a > b$.

Nous utiliserons cette propriété pour démontrer les autres propriétés.

2- Effet de l'addition

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$, et un nombre réel e quelconque.
Comparons $a+e$ et $b+e$.
Pour cela, cherchons le signe de leur différence $(b + e) - (a + e)$.
$(b + e) - (a + e) = b + e - a - e = b - a$.
Comme $a < b$, $b - a$ est positif, donc $(b + e) - (a + e)$ est positif et $a + e < b + e$.

> Quels que soient les réels a, b et e : si $a < b$, alors $a + e < b + e$.
>
> Ajouter un même nombre aux deux membres d'une inégalité fournit une nouvelle inégalité de même sens.

Remarque
Comme les soustractions peuvent toujours être remplacées par des additions (pour soustraire un nombre on ajoute son opposé), elles ont le même effet que les additions sur les inégalités.

> Quels que soient les réels a, b et e : si $a < b$, alors $a - e < b - e$.
>
> Soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité fournit une nouvelle inégalité de même sens.

3- Effet de la multiplication

Considérons deux nombres réels a et b tels que $a < b$, et un nombre réel k quelconque.
Comparons ka et kb.
Pour cela, cherchons le signe de leur différence $kb - ka$: $kb - ka = k(b - a)$.
Comme $a < b$, $b - a$ est positif. Le signe de $k(b - a)$ est donc le signe de k.
Si k est positif, $kb - ka$ est positif donc $ka < kb$.

Si k est négatif, $kb - ka$ est négatif donc $ka > kb$.

> Quels que soient les réels a, b et k :
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{k > 0}$, alors $ka < kb$.
> Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre **positif** fournit une nouvelle inégalité de même sens.
> Si $a < b$ et $\boldsymbol{k < 0}$, alors $ka > kb$.
> Multiplier les deux membres d'une inégalité par un même nombre **négatif** fournit une nouvelle inégalité de sens contraire.

Remarque 1
En prenant $k = -1$, on retrouve une propriété déjà observée : si $a < b$, alors $-a > -b$; en changeant le signe de deux nombres, on change leur ordre.

Remarque 2
Comme les divisions peuvent toujours être remplacées par des multiplications (pour diviser par un nombre on multiplie par son inverse), elles ont le même effet que les multiplications sur les inégalités.

4- Inéquations

Résoudre une inéquation d'inconnue x consiste à déterminer l'ensemble des réels x vérifiant une inégalité. On le fait en général en utilisant les propriétés précédentes.

Exemples
a) Résoudre l'inéquation $3x - 5 < 2$.
On commence par ajouter 5 aux deux membres de l'inéquation; on obtient $3x < 7$.
On divise les deux membres de l'inéquation par 3 qui est positif; l'ordre est conservé et on obtient $x < \frac{7}{3}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels inférieurs à $\frac{7}{3}$, c'est à dire l'intervalle $]-\infty; \frac{7}{3}[$.
b) Résoudre l'inéquation $x + 7 < 5x$.
On commence par soustraire $5x$ aux deux membres de l'inéquation; on obtient $-4x + 7 < 0$.
On soustrait 7 aux deux membres de l'inéquation; on obtient $-4x < -7$.
On divise les deux membres par -4 qui est négatif; l'ordre est inversé et on obtient $x > \frac{7}{4}$. L'ensemble des solutions est donc l'ensemble des réels supérieurs à $\frac{7}{4}$, c'est à dire l'intervalle $]\frac{7}{4}; +\infty[$.

C. Sens de variation et signe d'une fonction affine

Soit f la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.

1- Variations de f

> Si a est strictement positif, la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ est croissante; la droite représentation graphique de f « monte ».

Démonstration
Si $x_1 < x_2$, alors $ax_1 < ax_2$ (l'ordre n'est pas modifié car on a multiplié par un nombre positif), donc $ax_1 + b < ax_2 + b$ et finalement $f(x_1) < f(x_2)$; la fonction f conserve l'ordre des nombres.

> Si a est strictement négatif, la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ est décroissante; la droite représentation graphique de f «descend».

Démonstration
Si $x_1 < x_2$, alors $ax_1 > ax_2$ (l'ordre est modifié car on a multiplié par un nombre négatif), donc $ax_1 + b > ax_2 + b$ et finalement $f(x_1) > f(x_2)$; la fonction f inverse l'ordre des nombres.

Remarque
Si a = 0, nous avons déjà vu que la fonction f définie par $f(x) = ax + b$ est constante ; la droite représentation graphique de f est horizontale.

2- Equation ax + b = 0

> L'équation $ax + b = 0$ (avec $a \neq 0$) a une solution unique qui est $x = \frac{-b}{a}$.
>
> Cela signifie que la droite d'équation $y = ax + b$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{-b}{a} ; 0\right)$.

3- Signe de ax + b

On distingue deux cas.
Si *a* est positif, la fonction f est croissante, les valeurs de $f(x)$ vont donc évoluer du négatif vers le positif en passant par 0. On résume cela avec le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de f(x)		$-$	0	$+$	

Si *a* est négatif, la fonction f est décroissante, les valeurs de $f(x)$ vont donc évoluer du positif vers le négatif en passant par 0. On résume cela avec le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
signe de f(x)		$+$	0	$-$	