Fonction carré et fonctions associées

A. Fonction carré

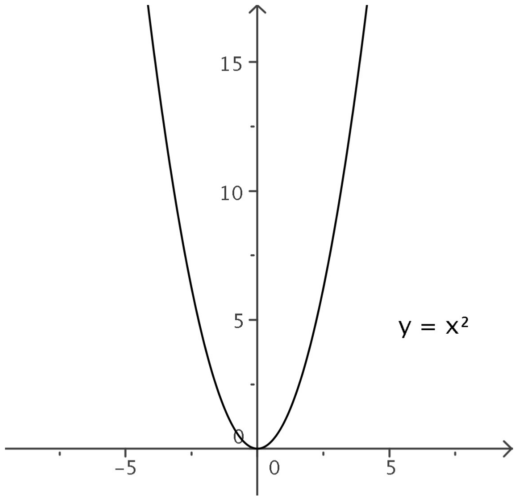
> La fonction carré est la fonction qui à tout réel x associe le réel x^2.

1- Représentation graphique

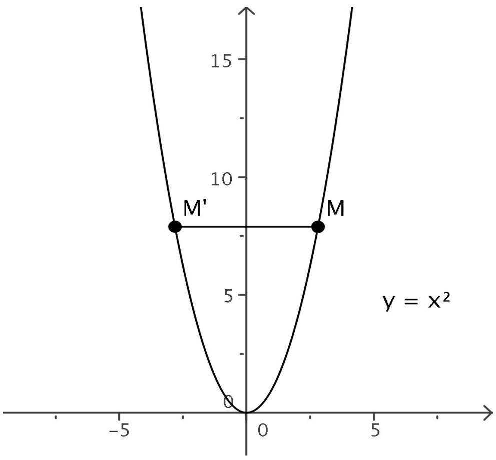
Commençons par construire la représentation graphique de la fonction carré à partir d'un tableau de valeurs.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x^2	16	9	4	1	0	1	4	9	16

On obtient la représentation graphique ci-contre, on appelle la courbe une *parabole* d'équation $y = x^2$.



2- Parité



La représentation graphique de la fonction carré possède un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.
Le segment [MM'] joignant deux points de la courbe d'abscisses opposées est coupé perpendiculairement en son milieu par l'axe des ordonnées. Celui-ci est donc un axe de symétrie.
Voyons comment cette propriété géométrique se traduit de façon algébrique.
Pour tout réel x, l'image de x est x^2 et l'image de $-x$ est $(-x)^2$ qui est aussi égal à x^2.
Ainsi, pour tout réel x, x et $-x$ ont la même image.

a) Définition

Une fonction f est paire si pour tout réel x de son ensemble de définition, le nombre $-x$ fait aussi partie de l'ensemble de définition et $f(-x) = f(x)$.
La fonction carré est donc un exemple de fonction paire.

b) Propriété

La représentation graphique de toute fonction paire admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

3- Tableau de variations

La représentation graphique de la fonction carrée nous suggère le tableau de variations suivant :

Notons que 0 est un minimum pour x^2, car un carré est toujours positif.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

4- Équation x² = a

Soit a un nombre réel.
Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solutions car un carré est toujours positif.
Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = 0$ a une solution unique qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ a deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

B. Fonctions polynômes du second degré

1- Définition

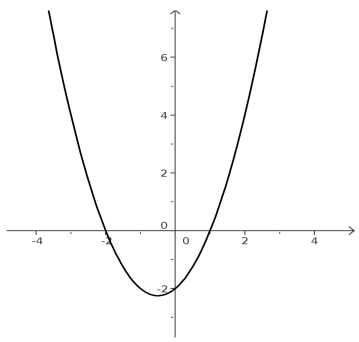
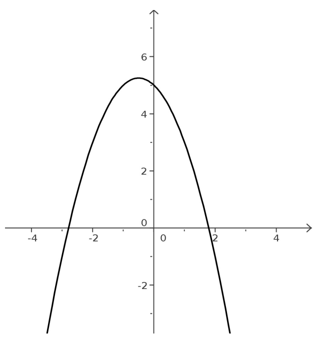
> On dit qu'une fonction f est un polynôme du second degré s'il existe trois réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemples
a) La fonction carré est une fonction polynôme du second degré avec $a = 1$ et $b = c = 0$.
b) La fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x - 3$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = -1$, $b = 2$ et $c = -3$.
c) La fonction g définie par $g(x) = \frac{x^2}{2} - 4$ est une fonction polynôme du second degré avec $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = -4$.

2- Représentation graphique

> La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

On peut distinguer deux cas selon le signe du coefficient de x^2.

Si $a > 0$	**Si $a < 0$**
	
La parabole présente un minimum et ses deux branches sont tournées vers le haut.	La parabole présente un maximum et ses deux branches sont tournées vers le bas.

3- Forme canonique

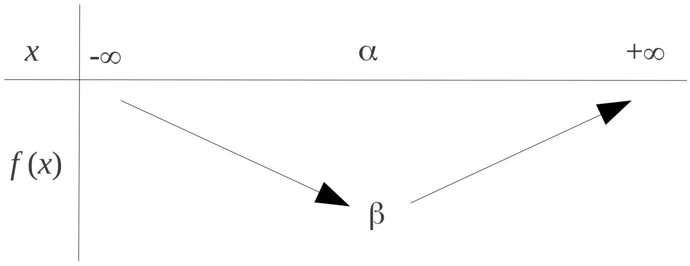
> Si f est la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$), alors il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.

La forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ est appelée la forme canonique de f. Elle permet de construire le tableau de variations de f et de trouver son extremum.

Propriété

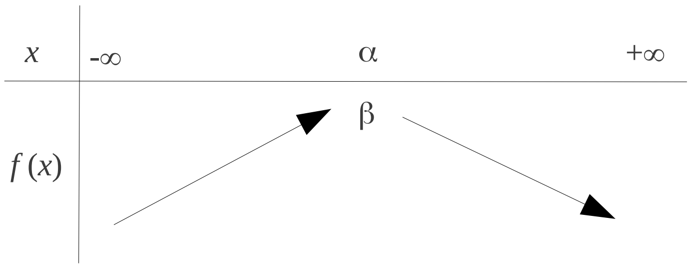
Soit f la fonction polynôme du second degré dont la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ (avec $a \neq 0$)

Si $a > 0$, f a le tableau de variations suivant :



f a un minimum égal à β et atteint pour $x = \alpha$.

Si a < 0, f a le tableau de variations suivant :



f a un maximum égal à β et atteint pour $x = \alpha$.

Exemples

a) Soit f définie par $f(x) = x^2 - 4x + 5$.
Montrer que $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, en déduire l'extremum de f.
$(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5 = f(x)$.
La forme canonique de f est donc $f(x) = (x - 2)^2 + 1$, on en déduit que f possède un minimum égal à 1 et atteint pour $x = 2$.

b) Soit g définie par $g(x) = -2x^2 + 4x + 6$.
Montrer que $g(x) = -2(x - 1)^2 + 8$, en déduire l'extremum de f.
$-2(x - 1)^2 + 8 = -2(x^2 - 2x + 1) + 8 = -2x^2 + 4x - 2 + 8 = -2x^2 + 4x + 6 = g(x)$.
La forme canonique de g est donc $g(x) = -2(x - 1)^2 + 8$, on en déduit que g possède un maximum égal à 8 et atteint pour $x = 1$.