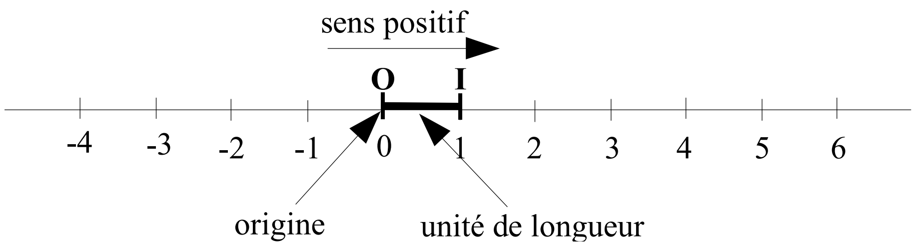
Coordonnées

A. Repérage sur une droite

Un repère (O,I) permet de graduer une droite et de mettre en correspondance les points de la droite avec l'ensemble des nombres réels.

1- Graduer une droite



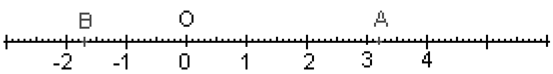
Pour graduer une droite il faut définir une origine, une unité de longueur et un sens positif.
Le repère (O,I) définit le point O comme origine, la longueur OI comme unité de longueur et le sens de O vers I comme sens positif.

2- Abscisse d'un point

A chaque point de la droite on associe un nombre réel :

- la valeur absolue indique la distance entre l'origine et le point en utilisant l'unité de longueur définie par le repère
- le signe indique le sens allant de l'origine au point

Réciproquement, à chaque nombre réel correspond un point de la droite.



Sur la figure :

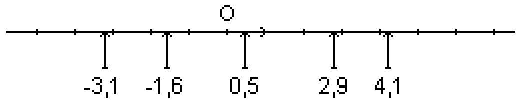
- le nombre 3,2 correspond au point A, cela signifie que OA=3,2 (l'unité étant OI) et que le sens de O vers A est le sens positif.
- le nombre –1,7 correspond au point B, cela signifie que OB=1,7 (l'unité étant OI) OI et que le sens de O vers B est le sens négatif.

A retenir
Le nombre réel associé à un point A est l'abscisse de A, on le note x_A.

- la valeur absolue de x_A (notée $|x_A|$) est la distance OA
- le signe de x_A indique le sens de O vers A.

3- Ordre des points et ordre des nombres

L'ordre des nombres réels est l'ordre des points correspondants sur une droite graduée.
L'ordre croissant (du plus petit au plus grand) correspond au sens positif sur la droite graduée.
Ainsi, pour comparer deux nombres réels, il suffit d'analyser la position des points correspondants sur une droite graduée.

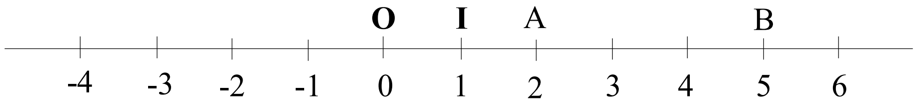


Par exemple, sur la figure ci-contre, on constate que :
-3,1 < -1,6 < 0,5 < 2,9 < 4,1

4- Abscisses et distance

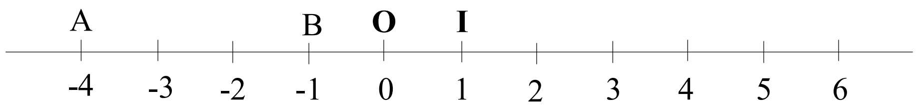
On considère une droite munie d'un repère (O,I) et deux points A(x_A) et B(x_B) tels que le sens de A vers B soit le sens positif.
On se propose de calculer la distance AB en utilisant les abscisses de A et de B.
On distingue 3 cas :

1er cas : A et B ont des abscisses positives



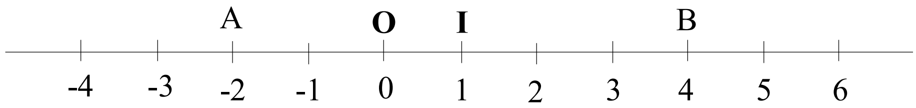
On a AB = OB – OA; or OB = x_B et OA = x_A; ainsi AB = $x_B - x_A$.
Sur l'exemple, AB = 5 – 2 = 3

2ème cas : A et B ont des abscisses négatives



On a AB = OA – OB; or OA = $-x_A$ et OB = $-x_B$; ainsi AB = $-x_A - (-x_B) = x_B - x_A$.
Sur l'exemple, AB = -1 - (-4) = -1 + 4 = 3.

3ème cas : A a une abscisse négative et B a une abscisse positive



On a AB = AO + OB; or OA = $-x_A$ et OB = x_B; ainsi AB = $-x_A + x_B = x_B - x_A$.
Sur l'exemple, AB = 4 - (-2) = 6.

A retenir
Si le sens de A vers B est le sens positif, c'est à dire si $x_A \leqslant x_B$, alors la distance AB est égale à la différence entre l'abscisse de B et celle de A.
Si $x_A \leqslant x_B$, alors AB = $x_B - x_A$.

Remarque
Si le sens de A vers B n'est pas le sens positif, $x_B - x_A$ est l'opposé de la distance AB. On a toutefois AB = $|x_B - x_A|$.

5- Abscisse du milieu d'un segment

On considère une droite munie d'un repère (O,I) et deux points A(x_A) et B(x_B).
On cherche à trouver l'abscisse du point M qui est le milieu du segment [AB].
Supposons que le sens de A vers B soit le sens positif et traduisons avec les abscisses que les distances AM et MB sont égales. On obtient :

$x_M - x_A = x_B - x_M$, soit $2x_M = x_A + x_B$ et donc $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

On obtient le même résultat si c'est le sens de B vers A qui est le sens positif.

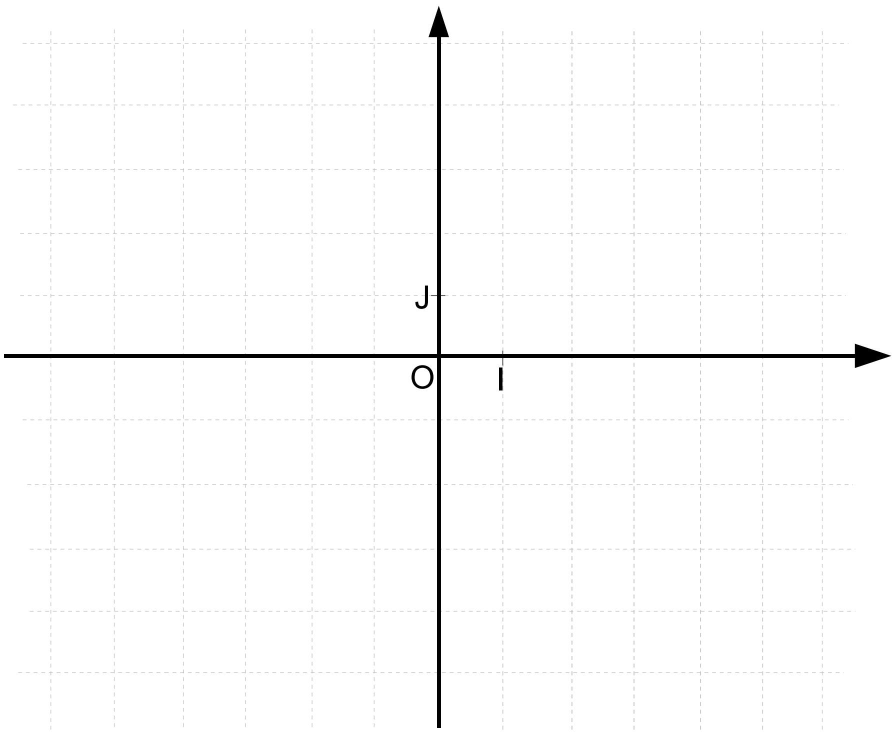
A retenir
L'abscisse du milieu d'un segment est la moyenne des abscisses de ses extrémités.
Si M est le milieu du segment [AB], alors $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$

B. Repérage dans le plan

Un repère (O,I,J) permet de construire deux axes gradués et de mettre en correspondance les points du plan avec des couples de nombres réels.

1- Repère orthonormal

Les 3 sommets d'un triangle OIJ rectangle et isocèle en O permettent de définir le repère **orthonormal** (O,I,J) et de quadriller le plan.



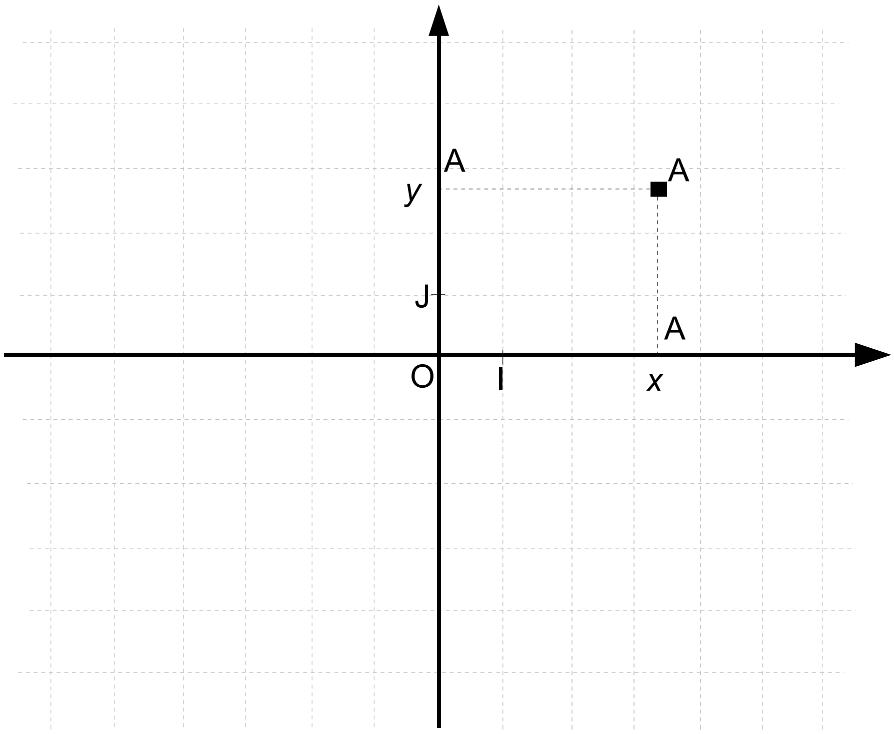
L'axe (OI) est appelé axe des abscisses et l'axe (OJ) est appelé axe des ordonnées.
Le point O, intersection des deux axes, est appelé origine du repère.

Remarque
Le repère (O,I,J) est appelé repère orthonormal parce que (OI) ⊥ (OJ) et OI = OJ. Les deux axes sont perpendiculaires et sont gradués en utilisant la mÍme unité de longueur. Il arrive parfois que les deux axes soient perpendiculaires mais n'aient pas la mÍme unité de longueur; dans ce cas le repère est orthogonal.

2- Coordonnées d'un point

Dans le plan est muni d'un repère orthonormal (O,I,J) on considère un point A.

La perpendiculaire à (OI) passant par A coupe (OI) au point A_1 d'abscisse x_A par rapport au repère (O,I).
La perpendiculaire à (OJ) passant par A coupe (OJ) au point A_2 d'abscisse y_A par rapport au repère (O,J).



On a ainsi associé le couple (x_A, y_A) au point A.

A retenir
Le couple (x_A, y_A) associé au point A est appelé couple des coordonnées de A.
Le nombre x_A est appelé abscisse de A. Le nombre y_A est appelé ordonnée de A.

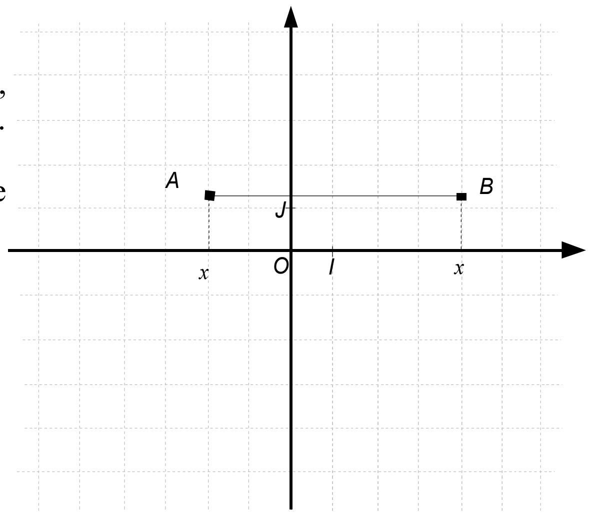
3- Calcul de la distance de deux points

Dans le plan est muni d'un repère orthonormal (O,I,J) on considère deux points A et B définis par leur coordonnées et on se propose de calculer la distance AB.
Commençons par envisager deux cas particuliers :

1er cas particulier
La droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses, les points A et B ont la même ordonnée, $y_A = y_B$.

On se trouve dans la même situation que sur une droite graduée, ainsi :
Si $x_A < x_B$, alors AB = $x_B - x_A$.

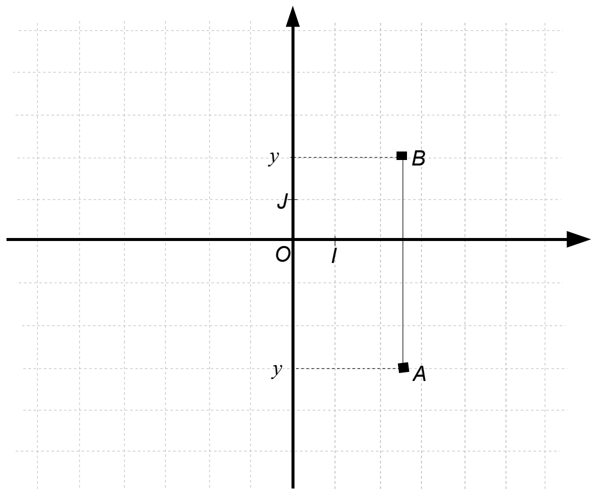
Sur la figure ci-contre, AB = 4-(-2)=6.



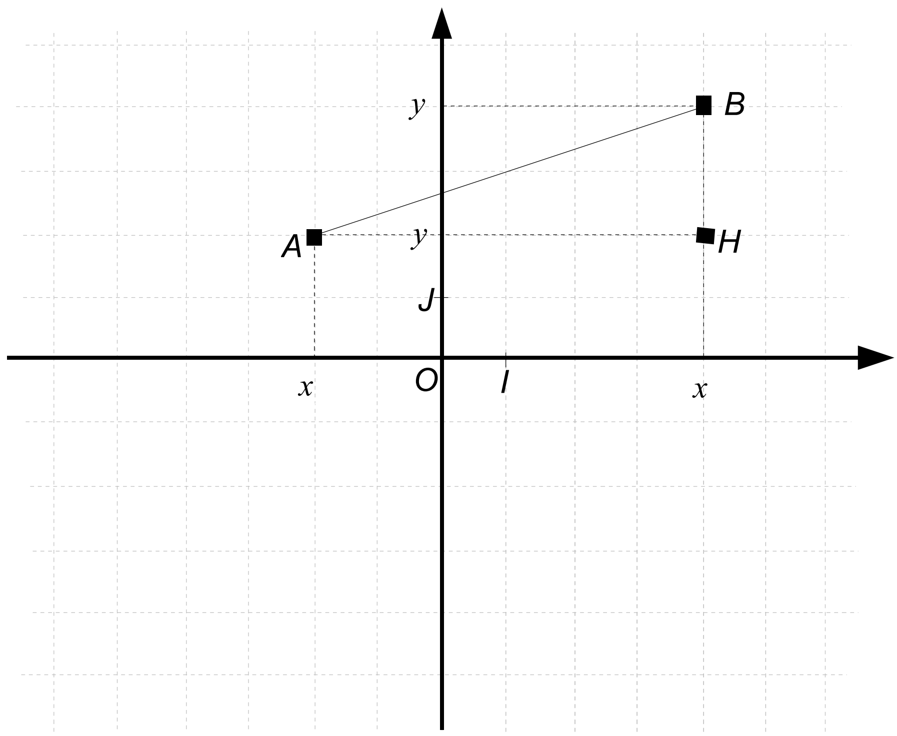
2ème cas particulier
(AB) est parallèle à l'axe des ordonnées, les points A et B ont la même abscisse, $x_A = x_B$.

On se trouve dans la même situation que sur une droite graduée, mais cette fois il s'agit de la droite (OJ), ainsi :
Si $y_A < y_B$, alors AB = $y_B - y_A$.

Sur la figure ci-contre, AB = 2 - (-3)=5.



Nous allons maintenant étudier le cas général, c'est à dire le cas où la droite (AB) n'est parallèle à aucun des deux axes.



Pour calculer AB, on fait intervenir le point H qui a l'abscisse de B et l'ordonnée de A. Ainsi $x_H = x_B$ et $y_H = y_A$. Comme le repère est orthonormal, le triangle ABH est rectangle en H et on peut lui appliquer le théorème de Pythagore.
On a donc AB² = AH² + HB².
Or, en se référant au 1er cas particulier, AH² = $(x_B - x_A)^2$ et en se référant au deuxième cas particuliers, HB² = $(y_B - y_A)^2$.
On a donc AB² = AH² + HB² = $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$, et finalement
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

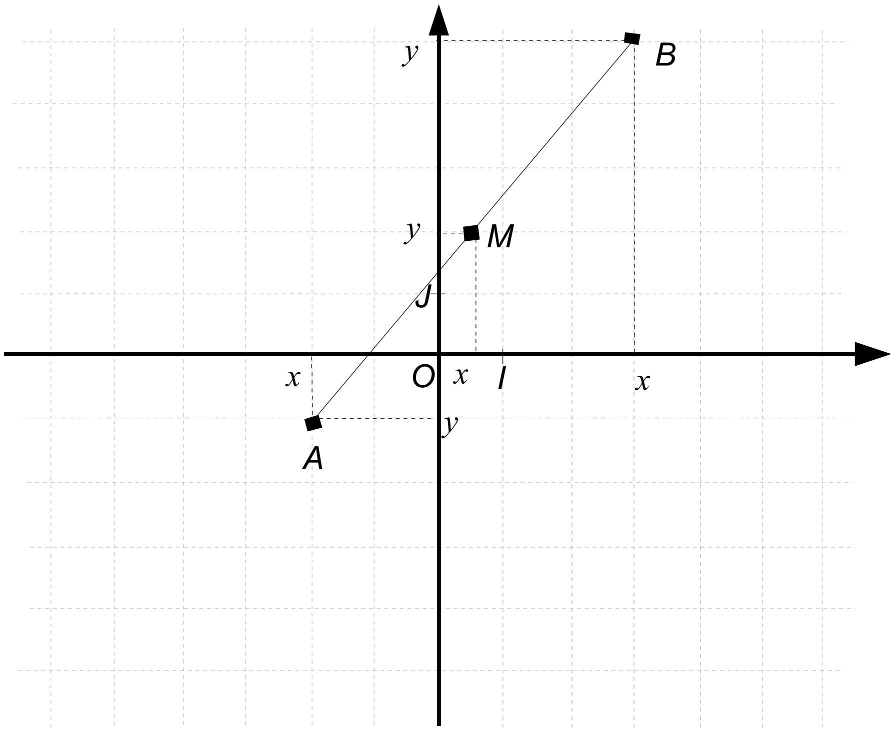
Sur l'exemple de la figure on a :
$AB = \sqrt{(4-(-2))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40}$

On peut remarquer que :
- cette formule n'a de sens que si les deux axes sont orthogonaux et gradués avec la même unité de longueur
- cette formule fonctionne aussi lorsque la droite (AB) est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

A retenir
Dans le plan muni d'un repère orthonormal, la distance entre les points A(x_A, y_A) et B(x_B, y_B) est donnée par la formule $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

4- Coordonnées du milieu d'un segment

Dans le plan est muni d'un repère orthonormal (O,I,J) on considère deux points A et B définis par leur coordonnées et on se propose de calculer les coordonnées de leur milieu M.



Sur l'axe (OI) on peut remarquer que le point d'abscisse x_M est le milieu du segment délimité par les points d'abscisses x_A et x_B. On a donc $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}$.
De même, sur l'axe (OJ) on peut remarquer que le point d'abscisse y_M est le milieu du segment délimité par les points d'abscisses y_A et y_B. On a donc $y_M=\frac{y_A+y_B}{2}$.
Ainsi, sur la figure :
$x_M=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$ et $y_M=\frac{-1+5}{2}=\frac{4}{2}=2$. Les coordonnées de M sont donc $\left(\frac{1}{2,}2\right)$.

Pour calculer les coordonnées du milieu de [AB] il a suffi de calculer les moyennes des coordonnées de A et de B.

A retenir
Les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées de ses extrémités.

Si M est le milieu de [AB], alors $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$