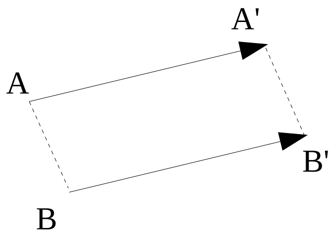
Vecteurs du plan et de l'espace

Utiliser les vecteurs pour démontrer que des points sont alignés ou coplanaires, que des droites sont parallèles, etc...

A. Rappels

1. Vecteurs égaux

Un vecteur est défini par une longueur, une direction et un sens.
Soient A, A', B et B' quatre points de l'espace.
$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ signifie que AA'B'B est un parallélogramme (éventuellement aplati).



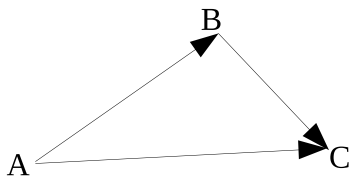
Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ont même longueur, même direction et même sens.
Remarques :
Les 4 points sont coplanaires.
L'égalité $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$ est équivalente à $\overrightarrow{A'A}=\overrightarrow{B'B}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ et $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'A'}$.

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul, on note $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

2. Addition de deux vecteurs

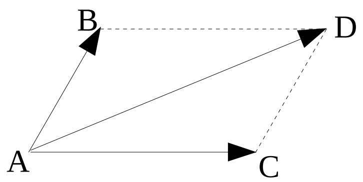
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on peut définir un vecteur noté $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant la relation de Chasles ou la règle du parallélogramme.

a) Relation de Chasles



Quels que soient les points A, B et C , $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

b) Règle du parallélogramme



Soient A, B, C et D 4 points.
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ signifie que ABDC est un parallélogramme.

c) Vecteurs opposés

Tout vecteur $\vec{u}$ a un opposé noté $-\vec{u}$ tel que $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$.
$\vec{u}$ et $-\vec{u}$ ont même direction et même longueur, mais des sens opposés.
Quels que soient les points A et B : $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

d) Propriétés de l'addition

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

- $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$ (commutativité)
- $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$ (associativité)

e) Soustraction

Pour soustraire un vecteur, il suffit d'ajouter son opposé.
Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

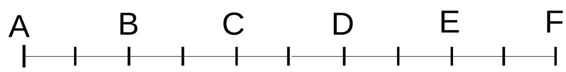
3. Multiplication d'un vecteur par un réel

a) Définition

Soient $\vec{u}$ un vecteur et *k* un réel. On définit le vecteur $k\vec{u}$ de la façon suivante :

- sa longueur est celle de $\vec{u}$ multipliée par |*k*|.
- il a la même direction que $\vec{u}$.
- si $k > 0$, il a le même sens que $\vec{u}$, si $k < 0$ il a le sens opposé.

Exemple
A, B, C, D, E et F sont alignés et régulièrement espacés dans cet ordre.



$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CF}=-3\overrightarrow{ED}$.

b) Propriétés

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et quels que soient les réels *x* et *y* :

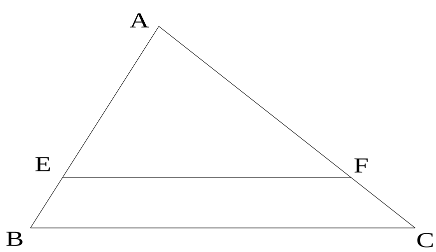
- $1\vec{u}=\vec{u}$, $x\vec{0}=\vec{0}$ et $0\vec{u}=\vec{0}$.
- $x(y\vec{u})=(xy)\vec{u}$.
- $(x+y)\vec{u}=x\vec{u}+y\vec{u}$.
- $x(\vec{u}+\vec{v})=x\vec{u}+x\vec{v}$.

c) Milieu d'un segment

Soient A, I et B trois points.
Les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

- I est le milieu de [AB]
- $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
- $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$
- $\overrightarrow{AI}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

d) Théorème de Thalès



Soient ABC un triangle, E et F deux points de (AB) et (AC).
Si (BC) // (EF), alors il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AC}$

B. Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires lorsque, si O, A et B sont trois points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, alors O, A et B sont alignés.

Conséquence
Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}$ et $\vec{0}$ sont colinéaires.

1. Propriété fondamentale

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Deux vecteurs non nuls colinéaires ont même direction.

Conséquence

Soient A, B et C trois points distincts.

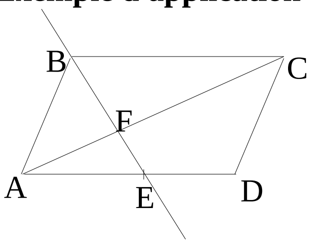
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

2. Droites parallèles

Soient A, B, C et D quatre points distincts.

Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$.

Exemple d'application



Soit ABCD un parallélogramme.
Construire le point E milieu de [AD] et le point F tel que $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\cdot$

Exprimer $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
Montrer que B, E et F sont alignés.

On décompose $\overrightarrow{BE}$ en une somme de deux vecteurs en utilisant le relation de Chasles et en faisant intervenir le point A.

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

On fait de même avec $\overrightarrow{BF}$.

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

En remarquant que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, on obtient :

$\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

Pour montrer que B, E et F sont alignés, on cherche un réel k tel que $\overrightarrow{BF}=k\overrightarrow{BE}$. En regardant le coefficient de $\overrightarrow{AB}$ on conjecture k = 2/3.

$\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{6}\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BF}$.

Comme $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$, les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BF}$ sont colinéaires et les points B, E et F sont donc alignés.

C. Vecteurs coplanaires

> Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires lorsque, si O, A, B et C sont quatre points tels que $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$ et $\overrightarrow{OC}=\vec{w}$, alors les points O, A, B et C sont coplanaires.

Conséquence

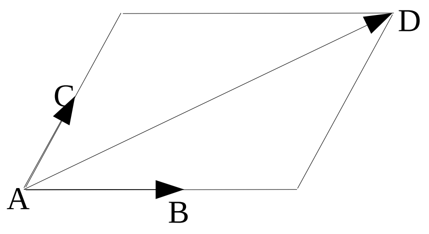
Si deux des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

1. Propriété fondamentale

> On considère trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ avec $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires.
>
> Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels *x* et *y* tels que $\vec{u}=x\vec{v}+y\vec{w}$.

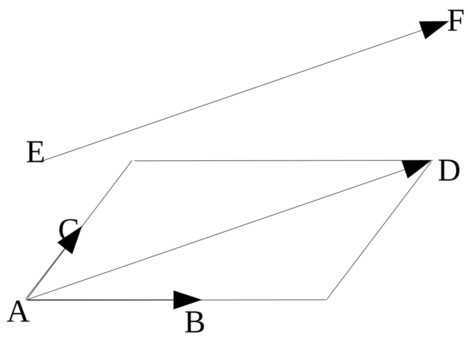
Le vecteur $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Conséquence



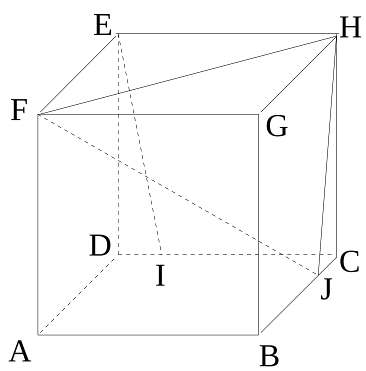
Soient A, B, C et D, 4 points tels que 3 quelconques d'entre eux ne sont pas alignés.
Les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires, donc s'il existe deux réels *x* et *y* tels que $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

2. Droite parallèle à un plan



Soient A, B, C trois points non alignés et E et F deux points distincts.
La droite (EF) est parallèle au plan (ABC) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
Il existe deux réels x et y tels que $\overrightarrow{EF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$.

Exemple d'application



ABCDEFGH est un cube.

I et J sont les points définis par $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.

Montrer que la droite (EI) est parallèle au plan (FHJ).

Exprimons $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DI}=-\overrightarrow{DE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DE}$

Cherchons des réels x et y tels que $\overrightarrow{EI} = x\overrightarrow{HF} + y\overrightarrow{HJ}$.

On a $x\overrightarrow{HF} + y\overrightarrow{HJ} = x\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC} + \frac{y}{4}\overrightarrow{DA} - y\overrightarrow{DE} = (x + \frac{y}{4})\overrightarrow{DA} - x\overrightarrow{DC} - y\overrightarrow{DE}$

et $\overrightarrow{EI} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DI} = -\overrightarrow{DE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$.

Il suffit donc que $\begin{cases} x + \frac{y}{4} = 0 \\ -x = \frac{1}{4} \\ -y = -1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = \frac{-1}{4} \\ y = 1 \end{cases}$.

On a donc $\overrightarrow{EI} = -\overrightarrow{DE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, les vecteurs $\overrightarrow{HF}$, $\overrightarrow{HJ}$ et $\overrightarrow{EI}$ sont coplanaires, et la droite (EI) est donc parallèle au plan (HJF).