Homothéties

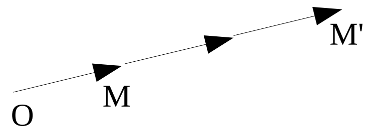
A Définition

> O est un point, k est un réel non nul.
> On appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$

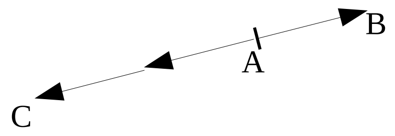
Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k, les énoncés suivants sont équivalents :

- M' est l'image de M par h
- M' = h(M)
- $\overrightarrow{OM'}=k\cdot\overrightarrow{OM}$

Exemples



Le point M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 3, en effet $\overrightarrow{OM'}=3\cdot\overrightarrow{OM}$.



Le point C est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport – 2, en effet $\overrightarrow{AC}=-2\cdot\overrightarrow{AB}$.
Le point B est l'image de C par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{-1}{2}$, en effet $\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Conséquences immédiates

- les points O, M et M' sont alignés (en effet $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires) et OM'=$|k|$ OM.
- le point O est sa propre image, on dit qu'il est invariant.
- si A, B et C sont trois points alignés, A étant distinct de B et C, alors il existe une unique homothétie de centre A qui transforme B en C.
- une symétrie centrale de centre O est une homothétie de centre O et de rapport – 1.
- une homothétie de rapport 1 laisse tous les points invariants.

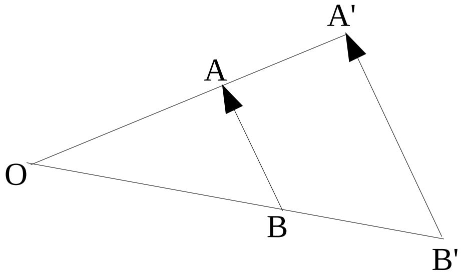
B Propriétés

On considère une homothétie h de centre O et de rapport k.

1- Propriété fondamentale

> Soient A et B deux points quelconques. Si A'=h(A) et B'=h(B), alors $\overrightarrow{A'B'}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

Démonstration

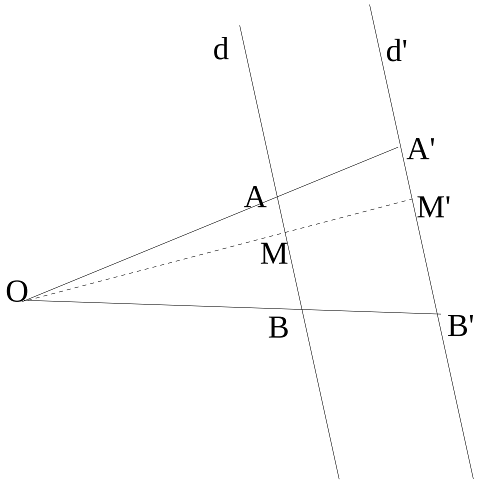


Comme A' = h(A) on a $\overrightarrow{OA'}=k\cdot\overrightarrow{OA}$ et comme B'=h(B) on a $\overrightarrow{OB'}=k\cdot\overrightarrow{OB}$.
Alors $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}=k\cdot\overrightarrow{AO}+k\cdot\overrightarrow{OB}=k(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})=k\cdot\overrightarrow{AB}$

2- Image d'une droite

> Une homothétie transforme une droite d en une droite d' parallèle à d.
> Si la droite d passe par le centre de l'homothétie, alors d' = d.

Démonstration

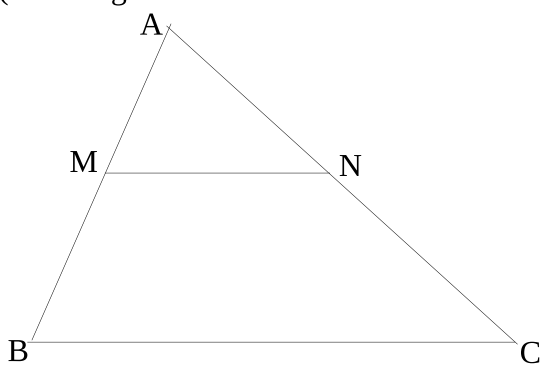


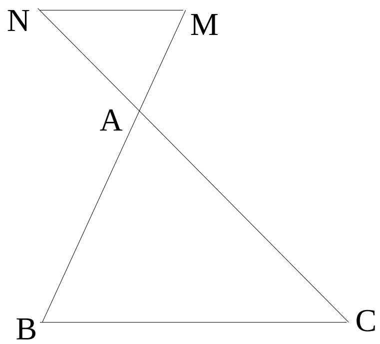
Soient A et B deux points de d, et A' et B' leurs images par l'homothétie de centre O et de rapport *k*.
Comme $\overrightarrow{A'B'}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, la doite d' passant par A' et B' est parallèle à d.
Soit M un point de d. Montrons que M' = h(M) est sur d'.
Il existe un réel x tel que $\overrightarrow{AM}=x\cdot\overrightarrow{AB}$.
D'autre part, $\overrightarrow{A'M'}=k\cdot\overrightarrow{AM}$.
Donc $\overrightarrow{A'M'}=k\cdot x\cdot\overrightarrow{AB}=x\cdot k\cdot\overrightarrow{AB}=x\cdot\overrightarrow{A'B'}$
Cela montre que A', B' et M' sont alignés, donc que M' est sur d'.
En prenant x dans [0;1], cela montre aussi que le segment [A'B'] est l'image du segment [AB].

3- Triangles homothétiques

> Soit ABC un triangle, M un point de (AB) et N un point de (AC).
> Si (MN) est parallèle à (BC), alors l'homothétie de centre A qui transforme B en M transforme aussi C en N.

(les triangles AMN et ABC sont dits homothétiques, ils sont dans la configuration de Thalès)





Soit h l'homothétie de centre A qui transforme B en M.
Le point C se trouve à l'intersection des droites (AC) et (BC). Son image par h sera donc à l'intersection des images de (AC) et (BC).
L'image de (AC) est (AC) (droite passant par le centre de l'homothétie).
L'image de (BC) est une droite parallèle à (BC) passant par M image de B, c'est donc la droite (MN).
L'image de C par h est donc l'intersection des droites (AC) et (MN), c'est le point N.

4- Image d'un cercle

> Un homothétie h de rapport *k* transforme un cercle de centre I et de rayon R en un cercle de centre I' et de rayon R' avec I' = h(I) et R' = |*k*| R.

C Effets de l'homothétie

1- Distances, aires et volumes

> Une homothétie de rapport k multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$.

2- Conservation de l'alignement

> Si A, B et C sont trois points alignés, leurs images A', B' et C' par une homothétie sont aussi trois points alignés.

3- Conservation du parallélisme

> Si d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, leurs images d_1' et d_2' par une homothétie sont aussi des droites parallèles.

4- Conservation du barycentre

> Si G est le barycentre de (A, α) et (B,β), et si G', A' et B' sont les images respectives de G, A et B par une homothétie, alors G' est le barycentre de (A', α) et (B', β).

En particulier, les homothéties conservent les milieux.

5- Conservation des angles orientés

> Dans le plan orienté, si A, B et C sont trois points distincts deux à deux, et si A', B' et C' sont leurs images respectives par une homothétie, alors $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$

En particulier, les homothéties conservent les angles droits, donc l'orthogonalité.