BARYCENTRE

A Barycentre de deux points pondérés

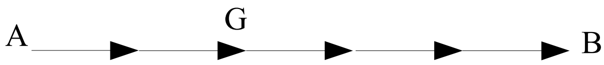
1. Définition

> Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés, c'est à dire deux points affectés des coefficients α et β.
>
> Si $\alpha + \beta \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$.
>
> Ce point G est appelé barycentre de (A,α) et (B,β).

Exemple
Soit [AB] un segment. Construire le point G barycentre de (A,3) et (B,2).
On a $3\ \overrightarrow{GA}+2\ \overrightarrow{GB}=\vec{0}$.

On en déduit que $3\ \overrightarrow{GA}+2\ \overrightarrow{GA}+2\ \overrightarrow{AB}=\vec{0}$, donc $5\ \overrightarrow{GA}=-2\ \overrightarrow{AB}$ et finalement $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.

Ceci nous permet de construire le point G.



2. Premières propriétés

Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$.

1) Le point G barycentre de (A,α) et (B,β) se trouve sur la droite (AB).
2) Pour tout réel k non nul, le barycentre de (A,α) et (B,β) est aussi le barycentre de $(A,k\alpha)$ et $(B,k\beta)$.
3) Pour tout réel x non nul, le barycentre de (A,x) et (B,x) est aussi le barycentre de (A,1) et (B,1); on l'appelle l'isobarycentre de A et B.
   L'isobarycentre de A et B est le milieu de [AB].

3. Propriété fondamentale

> Soient (A,α) et (B,β) deux points pondérés avec $\alpha + \beta \neq 0$.
>
> Si G est le barycentre de (A,α) et (B,β), pour tout point M $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Démonstration
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{MG}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}$.
Or comme G est le barycentre de (A,α) et (B,β), on a $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$, ce qui nous donne finalement $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$.

Quelques conséquences
Pour tout point M, $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$, nous pouvons donc choisir le point M comme nous le voulons.

1) Pour M=A, on obtient $\alpha\overrightarrow{AA}+\beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$, d'où $\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$.

2) Pour M=B, on obtient $\alpha\overrightarrow{BA}+\beta\overrightarrow{BB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{BG}$, d'où $\overrightarrow{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.

3) Pour M=G, on obtient $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GG}=\vec{0}$, c'est à dire la propriété qui définit G comme barycentre.

4) Si le plan est muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$, pour M=O on obtient $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{OG}$, donc $\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OA}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{OB}$.

   Les coordonnées du point G sont donc : $x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta}$ et $y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta}$.

   Ce sont les moyennes pondérées (ou coefficientées) des coordonnées de A et B.

B Barycentre de trois points pondérés.

1. Définition

Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés.
Si $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, alors il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
Ce point G est appelé barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ).

Remarque
Cette définition s'étend à 4, 5, ..., n points pondérés.

2. Premières propriétés

Soient (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$.

1)Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), alors les points A, B, C et G sont coplanaires.

2)Pour tout réel k non nul, si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), alors G est le barycentre de (A,kα), (B,kβ) et (C,kγ).

3)Propriété fondamentale :
Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), alors pour tout point M,
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

3. Associativité du barycentre

Soients (A,α), (B,β) et (C,γ) trois points pondérés avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ et $\alpha + \beta \neq 0$.

Si G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), et si I est le barycentre de (A,α) et (B,β), alors G est le barycentre (I, α + β) et (C, γ).

(on a remplacé deux des trois points par leur barycentre affecté de la somme des coefficients)

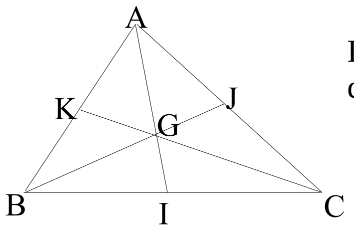
Démonstration
Comme G est le barycentre de (A,α), (B,β) et (C,γ), pour tout point M,
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.

Comme I est le barycentre de (A,α) et (B,β), pour tout point M $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$.
On en déduit que $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$. Pour M=G cela nous donne $(\alpha+\beta)\overrightarrow{GI}+\gamma\overrightarrow{GC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GG}=\vec{0}$. G est donc le barycentre de (I, α + β) et (C, γ).

4. Isobarycentre de trois points.

Soient A, B et C trois points.
On appelle isobarycentre de A, B et C est le barycentre de (A,1), (B,1) et (C,1).

Propriété



L'isobarycentre de A, B et C est le centre de gravité (point d'intersection des 3 médianes) du triangle ABC.

Démonstration

Soit G le barycentre de (A,1), (B,1) et (C,1).
Soit I le milieu de [BC], donc le barycentre de (B,1) et (C,1).
Par associativité du barycentre, on a G barycentre de (A,1) et (I,2), le point G est donc sur la droite (AI).
De même que si J est milieu de [AC], alors G est barycentre de (B,1) et (J,2), donc que G est sur (BJ).
De même que si K est milieu de [AB], alors G est barycentre de (C,1) et (K,2), donc que G est sur (CK).
Le point G se trouve sur les trois médianes, c'est bien le centre de gravité.