

Limite d'une suite

1- Exemple 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{n+4}{2n+2}$.

1- A l'aide d'un tableau de valeurs de la calculatrice, calculer les 11 premiers termes de cette suite.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	2	1,25	1	0,88	0,8	0,75	0,71	0,69	0,67	0,65	0,64

Que peut-on conjecturer ?

La suite semble être décroissante. Jusqu'où ses valeurs vont-elles diminuer ?

2- Afficher les 10 termes suivants. Les conjectures sont-elles vérifiées ?

n	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
u_n	0,636	0,625	0,615	0,607	0,600	0,594	0,588	0,583	0,579	0,575	0,571

3- Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n+2}$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante et que pour tout entier naturel n , $u_n > \frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est donc décroissante, mais ses valeurs restent toujours supérieures à 0,5.

4- On se demande si la suite (u_n) s'approche indéfiniment de 0,5.

a) A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 0,51$?

b) A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 0,501$?

c) Soit h un nombre réel strictement positif. A partir de quelle valeur de n a-t-on $u_n < 0,5 + h$?

Conclusion : la suite (u_n) prend, pour n assez grand, des valeurs aussi proches de 0,5 qu'on le désire, on dit que 0,5 est la limite de la suite (u_n) . On écrit $\lim u_n = 0,5$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0,5$.

2- Exemple 2

On considère un segment $[OA_0]$ de longueur 1 dm.

On appelle A_1 le milieu de $[OA_0]$, A_2 le milieu de $[OA_1]$, ..., A_{n+1} le milieu de $[OA_n]$.

On appelle u_n la longueur OA_n .

1- Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

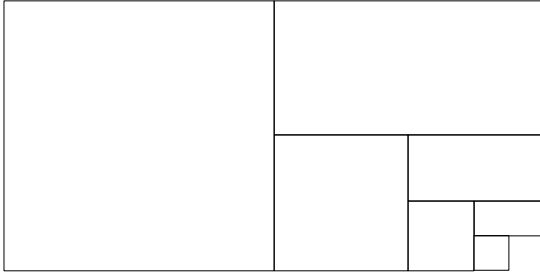
2- En utilisant un tableau de valeur, indiquer à partir de quelle valeur de n on a $u_n < 0,1$.

Peut-on avoir $u_n < 0,01$?

3- Soit h un nombre réel strictement positif. Peut-on avoir $u_n < h$ à partir d'un certain rang ?

Quelle est la limite de u_n ?

3- Exemple 3



On part d'un carré F_0 d'aire égale à $u_0 = 1$.
On lui ajoute un rectangle dont l'aire u_1 est la moitié de u_0 . On obtient la figure F_1 .
On ajoute un nouveau rectangle (carré) dont l'aire u_2 est la moitié de u_1 . On obtient la figure F_2 .
On continue ainsi indéfiniment.

- 1- Quelle est la nature de la suite u_n ?
- 2- On appelle v_n l'aire de la figure F_n . Conjecturer la limite de v_n ?
- 3- Quel rapport y a-t-il entre u_n et v_n ? En déduire l'expression de v_n en fonction de n et justifier la conjecture.