Suites

A Définitions. Notations

Une suite numérique est une fonction de ℕ vers ℝ.
Si une suite est représentée par la lettre u, on note u_n l'image de n, appelée aussi terme d'indice n.
La suite entière est représentée par (u_n).

1- Suite des valeurs d'une fonction.

Soit f une fonction définie sur $[0; +\infty[$. On peut définir une suite (u_n) par $u_n = f(n)$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x+2}{x+1}$. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$.

On a alors :

$u_0=\frac{0+2}{0+1}=\frac{2}{1}=2$, $u_1=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$, $u_2=\frac{2+2}{2+1}=\frac{4}{3}$, etc...

2- Suite définie par récurrence

On définit une suite par récurrence en indiquant son premier terme et une méthode de calcul d'un terme en fonction du précédent.

Exemple

Soit g la fonction définie par $g(x)=\frac{x}{2}-1$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. On a alors :

$u_1=g(u_0)=g(2)=\frac{2}{2}-1=0$, $u_2=g(u_1)=\frac{0}{2}-1=-1$, $u_3=g(u_2)=\frac{-1}{1}-1=-2$, etc...

Remarque

On ne peut calculer un terme que si on connaît le précédent, mais de proche en proche on peut calculer tous les termes en partant du premier.

3- Suites croissantes et décroissantes

Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n on a $u_n < u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n on a $u_n > u_{n+1}$.
Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n on a $u_n = u_{n+1}$.

Pour comparer u_{n+1} et u_n on peut étudier le signe de leur différence ou, si tous les u_n sont strictement positifs, comparer leur quotient à 1.

Exemple 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + n - 3$.
$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 + (n+1) - 3) - (n^2 + n - 3) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - 3 - n^2 - n + 3$
donc $u_{n+1} - u_n = 2n + 2 > 0$.
On en déduit que $u_n < u_{n+1}$, donc que (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_n=\frac{2^n}{3^n}$. Tous les termes de cette suite sont positifs.

$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{2^n}=\frac{2}{3}$. Comme $\frac{2}{3}<1$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$, la suite (u_n) est donc strictement décroissante.

B Suites arithmétiques

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n

$u_{n+1} = u_n + r$.

Le nombre r est appelé raison de la suite arithmétique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. On a $u_{n+1} – u_n = r$.
On en déduit que :

- si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.

2- Expression de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$.

Réciproquement, si f est la fonction affine définie par $f(x) = ax + b$, la suite (u_n) définie par $u_n = f(n)$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0 = b$ et de raison a.

3- Somme de termes consécutifs

a) Pour tout entier naturel n : $1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) Si (u_n) est une suite arithmétique, $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.

C Suites géométriques

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n

$u_{n+1}= q.u_n$.

Le nombre q est appelé raison de la suite géométrique.

1- Sens de variation

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$.

Si u_0 et q sont strictement positifs, on en déduit que :

- si $q > 1$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

- si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.

2- Expression de u_n en fonction de n

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.
Pour tout entier naturel n, $u_n = u_0.q^n$.

3- Somme de termes consécutifs

a) Pour tout réel q différent de 1 et pour tout entier naturel n : $1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

b) Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, $q\neq1$, $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n=u_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.