Suites convergentes

A. Limite finie d'une suite

1- Définition

Soit (u_n) une suite et L un nombre réel.

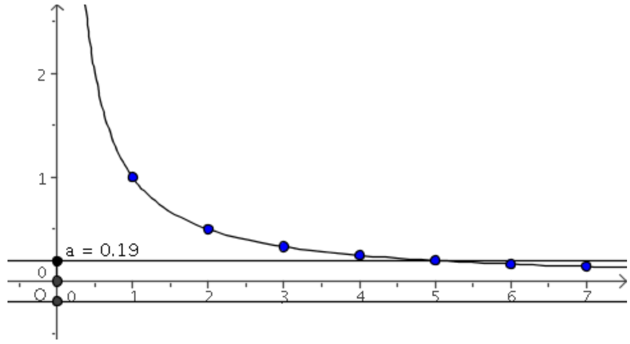
Dire que L est limite de la suite (u_n) signifie que tout intervalle ouvert de centre L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.

On dit alors que la suite (u_n) converge vers L. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \mathrm{L}$.

Une suite qui ne converge pas vers une limite finie est appelée suite divergente.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$ pour $n > 0$.



Montrons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

On considère un intervalle $]-a\ ;\ a[$ (avec $a > 0$) et on montre qu'il contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.

Remarquons d'abord que pour tout $n > 0$, $\dfrac{1}{n} > 0$ donc $\dfrac{1}{n} > -a$.

De plus, $\dfrac{1}{n} < a$ est équivalent à $n > \dfrac{1}{a}$, donc pour tous les entiers n supérieurs à $\dfrac{1}{a}$ on a $\dfrac{1}{n}$ compris entre $-a$ et a.

Ceci montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

2- Deux résultats à connaître

a) Soit a un nombre réel et p un entier naturel non nul.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a}{n} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a}{n^p} = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a}{\sqrt{n}} = 0$.

b) Soit q un nombre réel de l'intervalle $]-1\ ;\ 1[$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Les suites géométriques dont la raison a une valeur absolue strictement inférieure à 1 convergent vers 0.

Remarque à propos des suites géométriques
- Une suite géométrique de raison q avec $q > 1$ est divergente, elle prend des valeurs de plus en plus grande et dépasse n'importe quel réel donné.
- Une suite géométrique de raison q avec $q < -1$ est divergente, elle prend des valeurs successivement positives et négatives qui ont des valeurs absolues de plus en plus grandes.

B. Calculs de limites

1- Limites et opérations

> Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergeant vers L et L'.
>
> • Pour tout réel k, la suite (w_n) définie par $w_n = k.u_n$ converge vers kL.
> La suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$ converge vers $L + L'$.
>
> • La suite (w_n) définie par $w_n = u_n.v_n$ converge vers $L.L'$.
>
> • Si $L' \neq 0$, la suite (w_n) définie par $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ converge vers $\frac{L}{L'}$.

Exemple d'application

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$. Rechercher sa limite.

On a $u_n = \frac{n(2+\frac{5}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \frac{2+\frac{5}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n} = 0$, le numérateur converge vers 2.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, le dénominateur converge vers 1.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{1} = 2$.

2- Encadrement d'une suite

> Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites.
>
> Si pour tout entier naturel n supérieur à un entier n_0 , $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers une même limite L, alors la suite (u_n) converge aussi vers L.
>
> C'est le *théorème des gendarmes*.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ pour $n > 0$.

On sait que $-1 \leqslant \sin(n) \leqslant 1$, donc que $\frac{-1}{\sqrt{n}} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour tout entier $n > 0$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

C. Etude d'une suite définie par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1}=\frac{1}{4}u_n+2$.

1- Etude numérique

Commençons par calculer les premiers termes de la suite avec une calculatrice ou un tableur.
On obtient le tableau suivant :

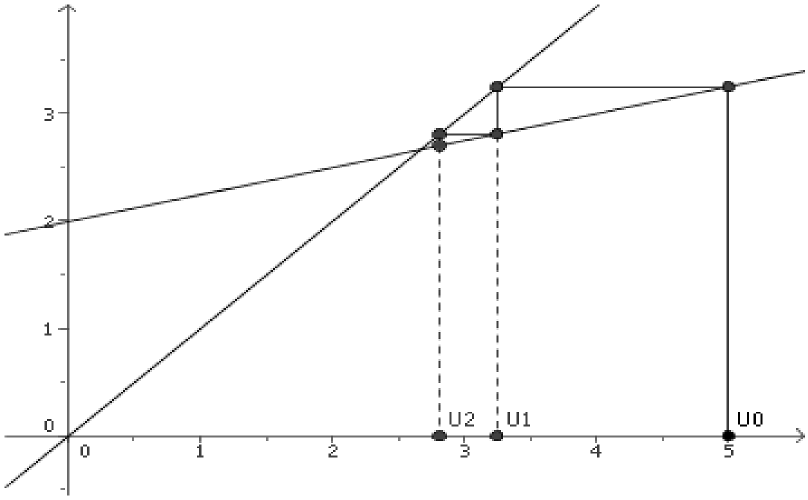
n	0	1	2	3	4	5	6
Un	5	3,25	2,8125	2,70313	2,67578	2,66895	2,66724

Il semble que la suite converge vers un nombre proche de 2,666. On peut penser à $\frac{8}{3}$.

2- Etude graphique

On considère la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{4}x+2$. On a pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Construisons la droite d'équation $y = x$ et la représentation graphique de f.



On marque u_0 sur l'axe des abscisses. Comme $u_1 = f(u_0)$, on utilise la représentation graphique de f pour marquer le point de coordonnées (u_0, u_1). Puis, avec la droite d'équation $y = x$, on marque le point de coordonnées (u_1, u_1), ce qui permet de trouver la position de u_1 sur l'axe des abscisses.
On recommence les mêmes opérations pour u_2, u_3, ...
On constate que les points construits se rapprochent du point d'intersection de la droite d'équation $y = x$ et de la représentation graphique de f. L'absccisse de ce point est solution de $\frac{1}{4}x+2=x$, il s'agit donc de $\frac{8}{3}$. On peut donc conjecturer que la suite (u_n) converge vers $\frac{8}{3}$.

3- Démonstration

Pour démontrer que la suite (u_n) converge vers $\frac{8}{3}$, nous allons utiliser une suite auxiliaire (v_n) définie par $v_n = u_n - \frac{8}{3}$.

a) Calculons les premiers termes des suites (u_n) et (v_n). Quelle conjecture peut-on faire sur la suite (v_n) ?

$u_0 = 5$, donc $v_0 = 5 - \frac{8}{3} = \frac{7}{3}$.

$u_1 = \frac{1}{4} \times 5 + 2 = \frac{13}{4}$, donc $v_1 = \frac{13}{4} - \frac{8}{3} = \frac{7}{12}$.

$u_2 = \frac{1}{4} \times \frac{13}{4} + 2 = \frac{45}{16}$, donc $v_2 = \frac{45}{16} - \frac{8}{3} = \frac{7}{48}$.

On constate que $v_1 = \frac{1}{4} v_0$ et $v_2 = \frac{1}{4} v_1$. Il semble donc que la suite (v_n) soit une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

b) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{8}{3} = \frac{1}{4} u_n + 2 - \frac{8}{3} = \frac{1}{4} u_n - \frac{2}{3}$. Or, comme $v_n = u_n - \frac{8}{3}$, on a $u_n = v_n + \frac{8}{3}$.

Ainsi $v_{n+1} = \frac{1}{4}\left(v_n + \frac{8}{3}\right) - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} v_n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} v_n$. Ceci montre que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

c) Exprimer v_n, puis u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

Comme v_n est géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $v_0 = \frac{7}{3}$, $v_n = \frac{7}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On sait que $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Puisque $u_n = v_n + \frac{8}{3}$, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{8}{3}$.