Le produit scalaire - Exercices

A Démontrer que des droites sont perpendiculaires

a) ABCD est un carré, I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [BC].
Montrer que les droites (CI) et (DJ) sont perpendiculaires.

b) ABCD est un carré de côté a. M est un point de la diagonale [BD], P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AD).
Montrer que les droites (PQ) et (CM) sont orthogonales.
(il suffit de montrer que $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CM}=0$, on peut le faire directement ou en utilisant des coordonnées)

c) Soit ABC un triangle.
BAE et CAF sont deux triangles rectangles et isocèles en A situés à l'extérieur de ABC.
On note AB = c, AC = b et $\widehat{BAC}=\alpha$.
Calculer $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$ en fonction de b, c et α.
On appelle I le milieu de [BC]. En utilisant les résultats précédents, montrer que les droites (AI) et (EF) sont perpendiculaires.

d) On considère un triangle OAB isocèle et rectangle en O, un réel k positif non nul et les points E et F définis par $\overrightarrow{OE}=k.\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OF}=k.\overrightarrow{OB}$.
On appelle I le milieu de [BE].
Démontrer que $\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})$, puis que les droites (OI) et (AF) sont perpendiculaires.

e) ABCD est un trapèze rectangle en A et B tel que AB = 2, BC = 4 et AD = 1.
Montrer que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

f) ABCD est un parallélogramme tel que AD = a et AB = 2a (a>0).
On appelle I le milieu de [AB].
Montrer que les droites (DI) et (IC) sont perpendiculaires.
(on peut utiliser de nombreuses méthodes : produit scalaire, angles, coordonnées, configurations, ...)

B Calculer des angles

a) ABCD est un carré de côté a, I est le milieu de [DA]. On pose $\widehat{ACI}=\theta$.
Calculer $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CI}$ de deux façons, en déduire la valeur exacte de cos(θ), puis une valeur approchée de θ à 1° près.

b) ABCD est un carré de côté a, I est le milieu de [DA] et J est le milieu de [DC]. On pose $\widehat{IBJ}=\theta$.
Calculer $\overrightarrow{BI}\cdot\overrightarrow{BJ}$ de deux façons, en déduire la valeur exacte de cos(θ), puis une valeur approchée de θ à 1° près.

c) ABCD est un carré de côté a. I et J sont définis par $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$. En exprimant le produit scalaire $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{AJ}$ de deux façons différentes, déterminer le cosinus de l'angle $\widehat{IAJ}$, puis sa mesure en radians.

C Calculer des longueurs

a) ABCD est un parallélogramme tel que AB = 4, AD = 2 et $\widehat{BAD}=\frac{\pi}{3}$.

Calculer le produit scalaire $\vec{AB}\cdot\vec{AD}$ de deux façons, en déduire AC.
Utiliser une méthode similaire pour calculer BD.
(autre possibilité : calculer $(\vec{AB}+\vec{AD})^2$ et $(\vec{AB}-\vec{AD})^2$)

b) ABCD est un rectangle tel que AB = *a* et BC = *b*, *a* > *b*.
On appelle H et K les projections orthogonales de A et C sur (DB).
Exprimer le produit scalaire $\vec{AC}\cdot\vec{DB}$ en fonction de *a* et *b*, puis en fonction de HK et DB.

En déduire que $HK=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

D Divers

1. Cosinus de π/12

OABC est un carré de côté 1 tel que $(\vec{OA},\vec{OC})=\frac{\pi}{2}$.

OAE est le triangle équilatéral tel que E soit à l'intérieur de OABC.
On considère le repère orthonormal direct $(O,\vec{OA},\vec{OC})$.
a) Calculer les coordonnées polaires et les coordonnées cartésiennes de B et E.
b) Calculer une mesure de $(\vec{OB},\vec{OE})$.

c) Calculer le produit scalaire $\vec{OB}\cdot\vec{OE}$ de deux façons. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{12})$.

2. Cosinus de π/8

ABD est un triangle isocèle et rectangle en A. On pose AB = *a*.
On considère le point C tel que DC = *a* et D∈ [AC].
a) Calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles du triangle ABC.

b) Calculer AB² en remarquant que $\vec{AB}=\vec{CB}-\vec{CA}$. En déduire la valeur exacte de $\cos(\frac{\pi}{8})$.

3. Relation d'Euler et orthocentre

A, B et C sont 3 points.
Montrer que pour tout point M du plan, $\vec{MA}\cdot\vec{BC}+\vec{MB}\cdot\vec{CA}+\vec{MC}\cdot\vec{AB}=0$. (c'est la relation d'Euler)
En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

4. Constante

On considère un cercle de centre O et de diamètre [AB].
E est un point fixe de [AB].
Une droite parallèle à (AB) coupe le cercle en M et N.
Montrer que EM² + EN² est constant.
(Indication : montrer que $\vec{OM}+\vec{ON}$ est orthogonal à $\vec{EO}$, utiliser $\vec{EM}=\vec{EO}+\vec{OM}$ et $\vec{EN}=\vec{EO}+\vec{ON}$)

5. Avec des coordonnées

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère les points A(2; -3), B(-2; 1) et C(3; 4).
a) Calculer AB, AC et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
En déduire $\cos(\widehat{BAC})$, puis une valeur approchée de $\widehat{BAC}$ à 1° près.
b) Soit H le pied de la hauteur issue de C.
Déterminer le réel *k* tel que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$ en utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
En déduire les coordonnées de H.
c) Calculer l'aire de ABC.