

Probabilités

A- Loi de probabilité

1- Univers

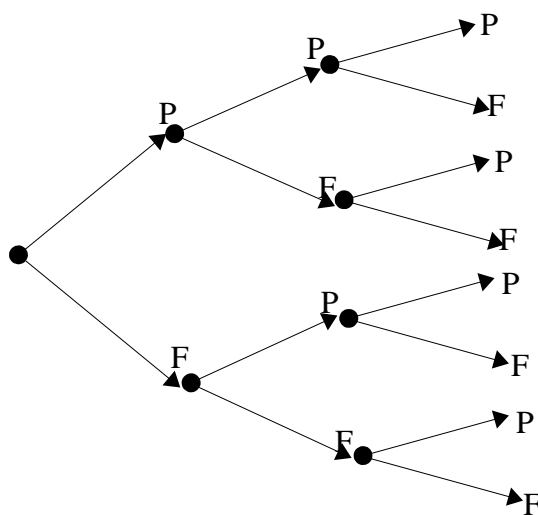
Une expérience aléatoire est une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. L'ensemble des résultats possibles, aussi appelés éventualités, est l'univers associé à l'expérience aléatoire.

Exemples :

- jeu de Pile ou Face : on a deux résultats possibles, Pile ou Face, l'univers est $U=\{\text{Pile,Face}\}$
- lancer un dé : on a six résultats possibles, l'univers est $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- lancer deux dés : l'univers est formé par l'ensemble des couples (x,y) où x et y sont des entiers pris entre 1 et 6, il contient $6 \times 6 = 36$ éléments, on peut le représenter par le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

- lancer de trois pièces : l'univers est formé de l'ensemble des triplets formés des lettres P (pour Pile) et F (pour face); il contient $2 \times 2 \times 2 = 8$ éventualités que l'on peut représenter à l'aide d'un arbre.



2- Loi de probabilité

On définit une loi de probabilité sur un univers $U=\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ en associant à chacune des éventualités e_i de U un réel positif ou nul p_i , ces réels vérifiant la relation

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

Cette loi peut être notée dans un tableau :

e_1	e_2	e_3	e_n
p_1	p_2	p_3	p_n

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, les fréquences d'apparition des éventualités e_i tendent vers les p_i .

3- Equiprobabilité

Lorsque tous les p_i d'une loi de probabilité sont égaux, on est en situation d'équiprobabilité, on dit que la loi est équirépartie.

Si l'univers de la loi contient n éléments, on a $p_i = \frac{1}{n}$ quel que soit i .

Exemples

- Jeu de Pile ou Face

Avec une pièce équilibrée, les deux faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

Pile	Face
1/2	1/2

- Lancement d'un dé

Avec un dé équilibré, toutes les faces ont la même probabilité de sortie, on a une loi équirépartie.

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

B- Evènements

On considère une expérience aléatoire et son univers $U = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ muni d'une loi de probabilité P .

1- Probabilité d'un évènement

Un évènement est une partie de l'univers. On dit qu'un évènement est réalisé lorsque le résultat obtenu à l'issue d'une expérience est une éventualité contenue dans l'évènement. La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de ses éventualités.

Exemple

On tire un dé, on appelle A l'évènement consistant à obtenir au moins 5.

On a alors $A = \{5, 6\}$. Comme les probabilités d'obtenir 5 et 6 sont égales à $1/6$, on aura

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

2- Propriétés

- L'ensemble vide noté \emptyset est appelé évènement impossible, $P(\emptyset) = 0$.
- L'univers U est appelé évènement certain, $P(U) = 1$.
- Pour tout évènement A , on a $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Dans le cas d'une loi équirépartie, si l'univers U contient n éventualités et si l'évènement A

contient k éventualités, alors $P(A) = \frac{k}{n}$.

On dit que $P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$.

Exemple

Une urne contient 10 boules bleues et 5 boules rouges indiscernables au toucher. Quelle est la probabilité de tirer une boule bleue ?

Les boules étant indiscernables au toucher, on est dans un cas d'équiprobabilité.

Comme il y a 15 boules au total, l'univers contient 15 éventualités.

L'évènement « tirer une boule bleue » contient 10 éventualités.

La probabilité de tirer une boule bleue est donc $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$.

3- Réunion et intersection d'évènements

La **réunion** des évènements A et B est l'évènement $A \cup B$ formé de toutes les éventualités appartenant à A **ou** à B . (il s'agit du **ou** inclusif, les éventualités peuvent appartenir aux deux évènements en même temps)

L'**intersection** des évènements A et B est l'évènement $A \cap B$ formé de toutes les éventualités appartenant à la fois à A **et** à B .

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, A et B n'ont aucune éventualité commune, on dit que ce sont des évènements disjoints ou incompatibles.

Si A et B sont deux évènements quelconques, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Si A et B sont deux évènements disjoints, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4- Evènements contraires

Le contraire de l'évènement A est l'évènement \bar{A} formé par toutes les éventualités de l'univers qui ne sont pas dans A .

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

C- Variables aléatoires

1- Définition

Une variable aléatoire sur l'univers $U = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ est une fonction X définie sur U .

On note $(X=x_i)$ l'ensemble des éventualités e_i vérifiant $X(e_i) = x_i$.

Si P est la loi de probabilité de U , la loi de probabilité de X est donnée par l'ensemble des probabilités des évènements $(X=x_i)$.

Exemple

On lance un dé. On perd 2 euros si on tire 1 ou 2, on gagne 0,5 euros si on tire 3 et enfin on gagne 1 euro si on tire 4, 5 ou 6. On appelle X la variable aléatoire qui donne le gain associé à un tirage. Ainsi :

$X(1) = X(2) = -2$; $X(3) = 0,5$; $X(4) = X(5) = X(6) = 1$.

On a $(X=-2) = \{1,2\}$, $(X=0,5) = \{3\}$ et $(X=1) = \{4,5,6\}$, d'où

$P(X=-2) = 2/6 = 1/3$, $P(X=0,5) = 1/6$ et $P(X=1) = 3/6 = 1/2$.

La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
P(X=xi)	1/3	1/6	1/2

2- Espérance, variance et écart type.

On considère une variable aléatoire X dont la loi de probabilité P est donnée par le tableau :

X	x_1	x_2	x_3	x_n
P(X=xi)	p_1	p_2	p_3	p_n

On appelle espérance mathématique de X le nombre réel

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum p_i x_i$$

On appelle variance de X le nombre réel

$$V(X) = (x_1 - E(X))^2 p_1 + (x_2 - E(X))^2 p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 p_n = \sum (x_i - E(X))^2 p_i$$

On appelle écart type de X le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Exemple

Reprenons le jeu décrit au 1) et la variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau :

X	- 2	0,5	1
P(X=xi)	1/3	1/6	1/2

On a alors $E(X) = -2 \times \frac{1}{3} + 0,5 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{-4}{6} + \frac{0,5}{6} + \frac{3}{6} = \frac{-0,5}{6} = \frac{-1}{12}$.

Comme l'espérance mathématique est négative, on peut penser que lors d'un grand nombre de parties le joueur sera perdant.