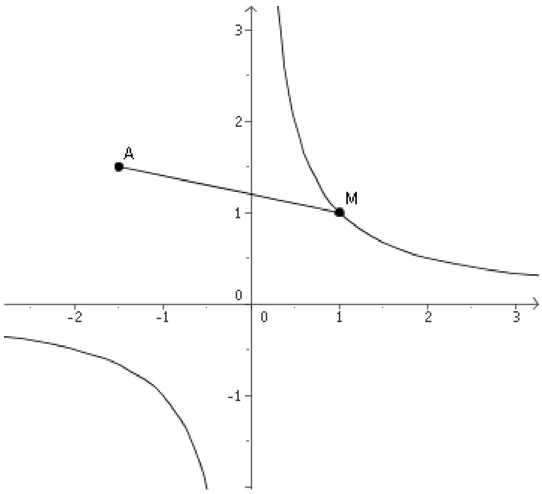
Distance d'un point à une courbe

1- Distance d'un point à une droite

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère la droite Δ d'équation $y = 2x + 1$ et le point A(5; – 2).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à tout réel x associe AM² où M est le point d'abscisse x de la droite Δ.
1- Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2- Etudier les variations de f.
3- Soit x_0 la valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint son minimum. On appelle H le point de Δ d'abscisse x_0. Montrer que (AH) $\perp$ Δ.
Comment pouvait-on prévoir ce résultat géométriquement ?

2- Distance d'un point à une hyperbole



Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, soit H l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et A le point de coordonnées $\left(\dfrac{-3}{2} ; \dfrac{3}{2}\right)$.

A tout réel x non nul, on associe le réel $f(x) = AM^2$, où M désigne le point d'abscisse x de l'hyperbole H.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Vérifier que $f'(x)$ est factorisable par $x^2 + 1$. En déduire le signe de $f'(x)$, puis établir le tableau des variations de f.
4. Soit $g(x) = \sqrt{f(x)}$. Etablir le tableau des variations de g.
5. En déduire qu'il existe deux points M_1 et M_2 de l'hyperbole H d'abscisses respectives x_1 et x_2 où la distance AM est minimale.
6. Montrer que la tangente à H en M_1 est orthogonale à la droite (AM_1).
7. Montrer que la tangente à H en M_2 est orthogonale à la droite (AM_2).