Limites et asymptotes

A Limites et infini

Soit *f* une fonction.

1- Limite infinie en l'infini

Lorsque *f (x)* peut être rendu supérieur à tout réel positif A pour *x* suffisamment grand, on dit que *f (x)* tend vers +∞ lorsque *x* tend vers +∞ . On écrit alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

On définit de manière similaire :

- $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (*f* (*x*) devient inférieur à – A),
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ (*x* doit être suffisamment grand en valeur absolue mais négatif)
- $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Résultats à retenir

• en +∞ : pour tout entier *n* supérieur à 0 $\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$; $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$.

• en –∞ : si *n* est un entier positif pair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^n=+\infty$;

mais si *n* est un entier positif impair, alors $\lim_{x\to-\infty} x^n=-\infty$.

2- Limite finie en l'infini

Lorsque *f (x)* peut être rendu aussi proche qu'on le désire d'un réel *L* pour *x* suffisamment grand, on dit que *f(x)* tend vers *L* lorsque *x* tend vers +∞ . On écrit alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$.

On définit de manière similaire $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$.

Résultat à retenir

Pour tout entier *n* supérieur à 0, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n}=0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n}=0$.

Asymptote horizontale

Lorsque $\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$, la courbe représentative de *f* admet la droite d'équation *y* = *L* comme asymptote horizontale; cela signifie que lorsque *x* tend vers +∞ ou vers -∞, la courbe se rapproche de plus en plus de la droite.

3- Limite infinie en x_0

Lorsque *f(x)* peut être rendu supérieur à tout réel positif A pour *x* suffisamment proche d'un réel x_0, on dit que *f(x)* tend vers +∞ lorsque *x* tend vers x_0. On écrit alors $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

On définit de façon similaire $\lim_{x\to x_0} f(x)=-\infty$.

Résultats à retenir

• sur]0; +∞[, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}=+\infty$, on écrit alors $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}=+\infty$.

• sur]-∞; 0[, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$, on écrit alors $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

Asymptote verticale

Lorsque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ou $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, la courbe représentative de *f* admet la droite d'équation $x = x_0$ comme asymptote verticale.

4- Asymptotes obliques

Soit *f* une fonction de courbe C dans le plan muni d'un repère.
Soit D la droite d'équation $y = ax + b$.
La droite D est une asymptote à la coube C en +∞ si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b)=0$.
La droite D est une asymptote à la coube C en –∞ si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b)=0$.

Exemple :

Soit *f* définie par $f(x)=x-3+\frac{1}{x}$ sur ℝ*.

Lorsque *x* tend vers +∞, $\frac{1}{x}$ tend vers 0, *f(x)* est donc très voisin de $x - 3$.

Montrons que la droite d'équation y = x – 3 est une asymptote à la courbe représentative de *f*.

$f(x)-(x-3)=x-3+\frac{1}{x}-(x-3)=\frac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=0$ et la droite d'équation $y = x - 3$ est bien une asymptote à la courbe représentative de *f*.

B Limites et opérations

1- Sommes

limite de f	L_1	L	+∞	-∞	+∞
limite de g	L_2	±∞	+∞	-∞	-∞
limite de f+g	L_1+L_2	±∞	+∞	-∞	**???**

2- Produits

limite de f	L_1	L≠0	±∞	0
limite de g	L_2	±∞	±∞	±∞
limite de fg	L_1L_2	±∞ (règle des signes)	±∞ (règle de signes)	**???**

3- Quotients

limite de f	L_1	L	±∞	L≠0	±∞	0
limite de g	$L_2\neq 0$	±∞	L	0	±∞	0
limite de f/g	L_1 / L_2	0	±∞ (règle des signes)	±∞ (règle des signes)	**???**	**???**

Remarque

On a 4 formes indéterminées qui sont de la forme $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$.

4- Exemples d'applications

1) Calculer $\lim_{x \to 1^+} \frac{-4}{x-1}$ et $\lim_{x \to 1^-} \frac{-4}{x-1}$.

   Le numérateur est constant égal à – 4.

   Quand x tend vers 1^+, le dénominateur tend vers 0^+ et donc $\lim_{x \to 1^+} \frac{-4}{x-1} = -\infty$.

   Quand x tend vers 1^-, le dénominateur tend vers 0^- et donc $\lim_{x \to 1^-} \frac{-4}{x-1} = +\infty$.

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x$.

   Comme x^2 et x tendent vers $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $\infty - \infty$. On transforme l'expression $x^2 - x$ en mettant x^2 en facteur.

   $x^2 - x = x^2\left(1 - \frac{x}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Or $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} 1 - \frac{1}{x} = 1$.

   On en déduit, en utilisant la règle du produit des limites que $\lim_{x \to +\infty} x^2 - x = +\infty$.

3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x+1}$.

   Comme $2x - 3$ et $x + 1$ tendent vers $+\infty$, on a une forme indéterminée du type $\frac{\infty}{\infty}$. On effectue la transformation suivante : $\frac{2x-3}{x+1} = \frac{x\left(2 - \frac{3}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}}$.

   Or $\lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{3}{x} = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.

   On en déduit que $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2}{1} = 2$.