Généralités sur les fonctions

Voir des propriétés sur la calculette et de les démontrer par des calculs :

- ensemble de définition
- solutions d'équations et d'inéquations
- croissance et décroissance
- symétries
- maximum et minimum (par exemple $4+x^2$ a 4 comme minimum)

A. Rappels

1. Image et antécédent

Une fonction f essaie d'associer à chaque réel x un **unique** réel noté $f(x)$.
On dit alors que $f(x)$ est l'image de x, et que x est un antécédent de $f(x)$.
Si elle existe, l'image de x est unique, par contre un réel y peut avoir plusieurs antécédents.
On note : $f : x \mapsto f(x)$.

Exemple
Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 3$.
L'image du réel – 3 est $f(-3) = (-3)^2 + 2 \times (-3) + 3 = 9 - 6 + 3 = 6$.
L'image du réel 1 est $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6$.
Le réel 6 a donc au moins 2 antécédents qui sont –3 et 1.

2. Ensemble de définition

L'ensemble D_f des réels qui ont une image par la fonction f est appelé ensemble de définition de f.

Exemples

1. Fonctions affines : elles sont du type $x \mapsto ax + b$ où a et b sont deux coefficients réels; leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
2. Fonctions monômes : elles sont du type $x \mapsto ax^n$ avec a coefficient non nul et n entier naturel; n est le degré du monôme. Leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
3. Fonctions polynômes : ce sont des sommes de monômes; le degré d'un polynôme est le degré de son monôme de plus haut degré. Leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
   La fonction $f : x \mapsto 2x^3 - 4x^2 + 1$ est un polynôme de degré 3.
4. Fonction inverse : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$; son ensemble de définition est $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$, car on ne peut pas diviser par 0.
5. Fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$; son ensemble de définition est $[0; +\infty[$, car seuls les nombres positifs ont une racine carrée.

3. Courbe représentative d'une fonction

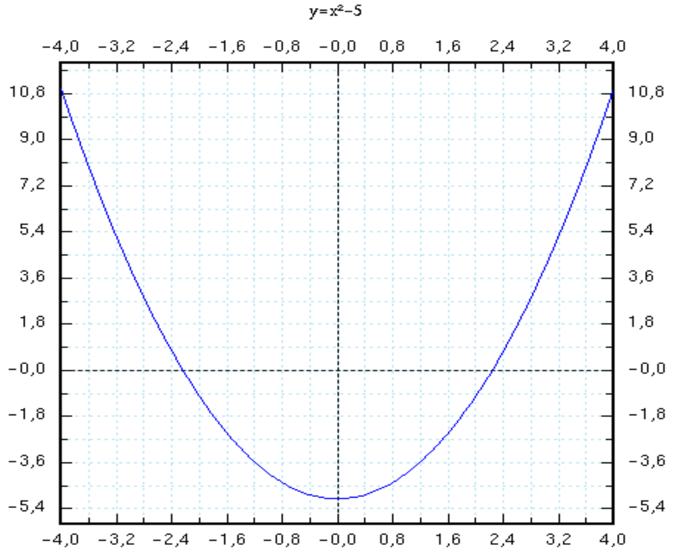
Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle courbe représentative d'une fonction f définie sur D_f l'ensemble des points de coordonnées $(x, f(x))$ avec x élément de D_f.
Un point $M(x, y)$ se trouve sur la courbe si et seulement si $y = f(x)$.

On dit que $y = f(x)$ est une équation de la courbe.

Exemple
Soit f la fonction définie sur [– 4; 4] par $f(x) = x^2 - 5$. .
On a le tableau de valeurs suivants :

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
***f*(*x*)**	11	4	-1	-4	-5	-4	-1	4	11

On construit la courbe :



4. Sens de variations

Fonction croissante

Une fonction f est croissante sur un intervalle **I** lorsqu'elle conserve l'ordre des nombres.
Pour tous les réels u et v de I, si $u < v$ alors $f(u) < f(v)$.
La courbe représentative « *monte* » lorsqu'on la parcourt de la gauche vers la droite.

Fonction décroissante

Une fonction f est décroissante sur un intervalle **I** lorsqu'elle inverse l'ordre des nombres.
Pour tous les réels u et v de I, si $u < v$ alors $f(u) > f(v)$.
La courbe représentative « *descend* » lorsqu'on la parcourt de la gauche vers la droite.

Tableau de variations

Une fonction qui est constamment croissante ou décroissante sur un intervalle est dite monotone sur cet intervalle.
Lors de l'étude d'une fonction on essaie de déterminer les intervalles sur lesquels elle est monotone. On note le résultat dans un tableau de variations.

Exemple
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 5$ sur [– 4; 4].
Elle a le tableau de variations suivant :

x	-4		0		4
$f(x)$	11	$\searrow$	-5	$\nearrow$	11

La fonction f est décroissante de 11 à -5 sur $[-4; 0]$ et croissante de -5 à 11 sur $[0 ; 4]$.
Elle a un minimum égal à -5 pour $x = 0$.

5. Parité et symétries

Fonction paire

Une fonction f définie sur D_f est paire si pour tout réel x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées du repère comme axe de symétrie.

Exemples
- Les fonctions monômes de degré pair sont des fonctions paires.
- La fonction valeur absolue est une fonction paire.

Fonction impaire

Une fonction f définie sur D_f est impaire si pour tout réel x de D_f, $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative d'une fonction paire admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exemples
- Les fonctions monômes de degré impair sont des fonctions impaires.
- La fonction inverse est une fonction impaire.

B. Fonctions de référence

Une série de tableaux de variations à connaître pour certaines fonctions usuelles :
fonctions affines, carré, racine carrée, inverse, valeur absolue.

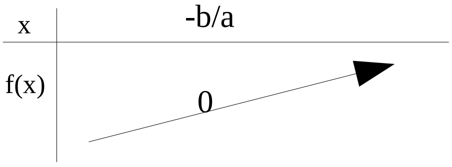
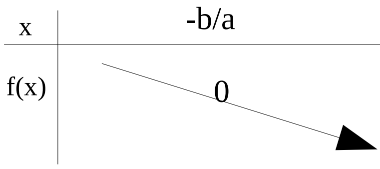
1. Fonctions affines

Une fonction f est une fonction affine s'il existe deux réels a et b tels que $f(x) = ax + b$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}$.
Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$. (le réel a est appelé coefficient directeur de la droite, le réel b est appelé ordonnée à l'origine (image de 0)).

Si $a = 0$, f est une fonction constante. Pour tout réel x, $f(x) = b$. La représentation graphique de f est une droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses du repère).

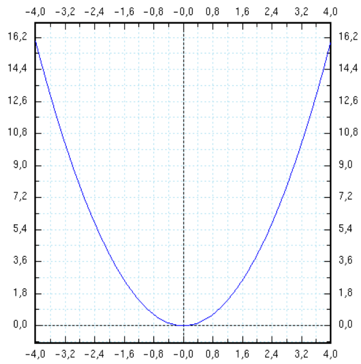
Si $a \neq 0$, f s'annule pour $x = -\dfrac{b}{a}$.

On distingue les deux cas suivants :

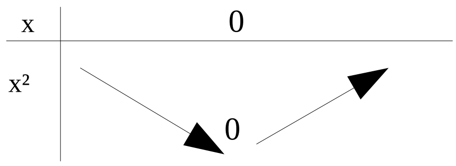
Si $a > 0$, f est une fonction croissante.	Si $a < 0$, f est une fonction décroissante.
	

2. Fonction carré

Il s'agit de la fonction $x \mapsto x^2$. C'est une fonction paire définie sur ℝ.



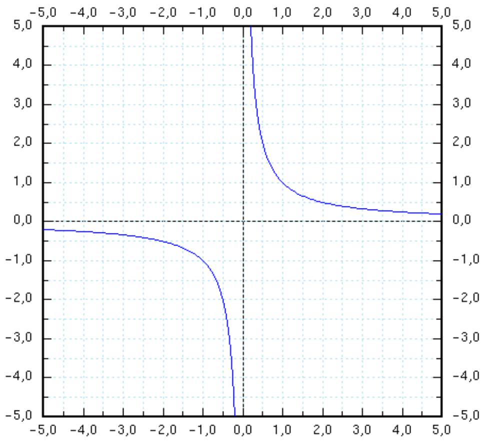
On a le tableau de variations suivant :



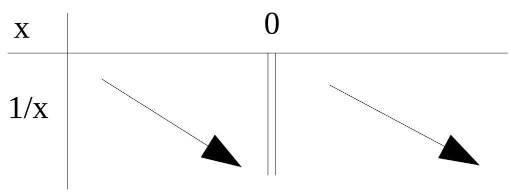
La fonction carrée est décroissante sur]-∞ ; 0] et croissante sur]0 ; +∞].
0 est un minimum : un carré est toujours positif.
La courbe est une parabole.

3. Fonction inverse

Il s'agit de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Son ensemble de définition est ℝ* (on ne peut pas diviser par 0). C'est une fonction impaire.



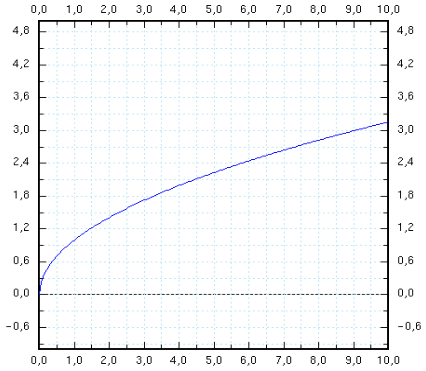
On a le tableau de variations suivant :



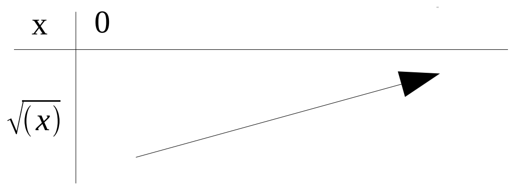
La courbe est une hyperbole.

4. Fonction racine carrée

Il s'agit de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$. Son ensemble de définition est [0; +∞[.



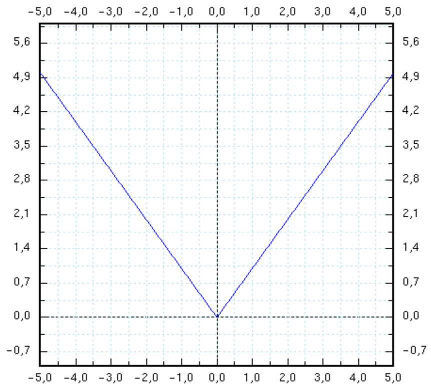
On a le tableau de variations suivant :



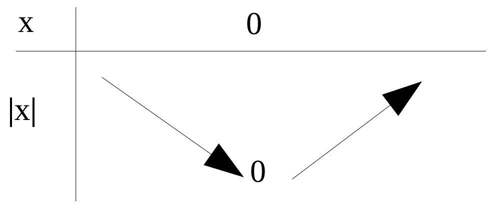
La courbe est une demi-parabole.

5. Fonction valeur absolue.

Il s'agit de la fonction $x \mapsto |x|$. C'est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.
Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$; si $x < 0$, $|x| = x$.



On a le tableau de variations suivant :



La courbe est formée de deux demi-droites issues des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

C. Opérations sur les fonctions

1. Addition d'un réel. Multiplication par un réel.

Soit f une fonction définie sur D_f et k un réel.
La fonction $x \mapsto f(x) + k$ a les mêmes variations que la fonction f.
Si k est positif, la fonction $x \mapsto k.f(x)$ a les mêmes variations que f.
Si k est négatif, la fonction $x \mapsto k.f(x)$ a les variations inverses de celles de f.

Exemple

On sait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0; +\infty[$. On en déduit que :

- la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}+4$ est décroissante sur $]0; +\infty[$.
- la fonction $x \mapsto \frac{3}{x}$ est décroissante sur$]0; +\infty[$.
- la fonction $x \mapsto \frac{-2}{x}$ est croissante sur $]0; +\infty[$.

2. Opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_f et D_g.
On définit les fonctions suivantes :

- La fonction $f+g : x \mapsto f(x) + g(x)$; son ensemble de définition est l'intersection de D_f et D_g.
- La fonction $f - g : x \mapsto f(x) + g(x)$; son ensemble de définition est l'intersection de D_f et D_g.
- La fonction $f.g : x \mapsto f(x) \times g(x)$; son ensemble de définition est l'intersection de D_f et D_g.
- La fonction $\frac{f}{g} : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$; son ensemble de définition est l'intersection de D_f et D_g privée des valeurs de x qui annulent $g(x)$.

Propriétés :

- La somme de deux fonctions croissantes est croissante.
- La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

Attention :
il n'y a pas de règles générales de ce genre pour les autres opérations.

3. Composition des fonctions

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_f et D_g.
La fonction $g \circ f$ (lire g rond f) est la fonction qui à x associe $g[f(x)]$.
Ainsi, pour tout x, on a $g \circ f(x) = g[f(x)]$.
$g \circ f$ est définie pour $x \in D_f$ et $f(x) \in D_g$.

Exemple
Soient $f : x \mapsto 2x - 1$ et $g : x \mapsto x^2 - x$.
On a $g \circ f(x) = g(2x-1) = (2x-1)^2 - (2x-1) = 4x^2 - 6x + 2$
et $f \circ g(x) = f(x^2 - 1) = 2(x^2 - x) - 1 = 2x^2 - 2x - 1$.
En général les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentes.

Propriétés
Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition sont D_f et D_g.
Soit I un intervalle de D_f sur lequel f est monotone.
Soit J un intervalle de D_g sur lequel g est monotone et tel que si x est dans I, $f(x)$ est dans J.

- Lorsque f et g ont même sens de variation, $g \circ f$ est croissante sur I.
- Lorsque f et g ont des sens de variation différents, $g \circ f$ est décroissante sur I.

Exemple
Etudier les variations de la fonction $f : x \mapsto (x-2)^2$.
Soient $f_1 : x \mapsto x - 2$ et $f_2 : x \mapsto x^2$.
On a $f = f_2 \circ f_1$.

1. On prend $I = [2; +\infty[$. f_1 est croissante sur I. Pour tout x de I, $f_1(x)$ est dans J avec $J = [0; +\infty[$ et f_2 est croissante sur J. On en déduit que $f_2 \circ f_1$ est croissante sur I.
2. On prend $I =]-\infty; 2]$. f_1 est croissante sur I. Pour tout x de I, $f_1(x)$ est dans J avec $J =]-\infty; 0]$ et f_2 est décroissante sur J. On en déduit que $f_2 \circ f_1$ est décroissante sur I.