Epreuve commune de Mathématiques (2)

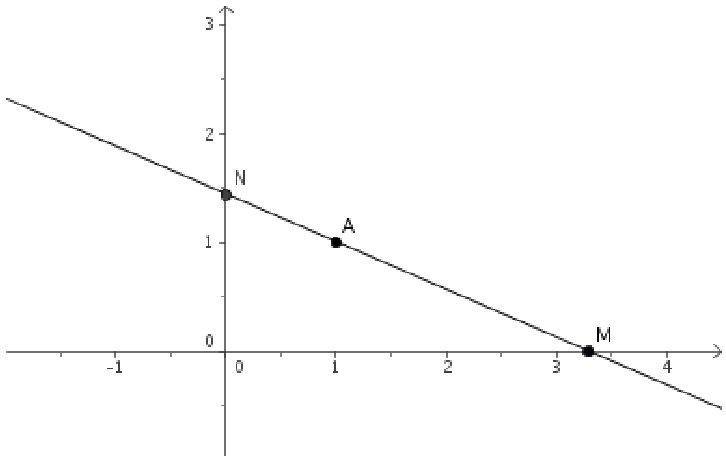
Exercice 1

1- f est la fonction définie pour tout $x > 1$ par $f(x) = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$.

a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
b) Dresser le tableau de variations de f.

2- On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (*unité 2 cm*).
a) Quelle est l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 3 ?
b) Etudier le signe de $f(x)-\left(\dfrac{3}{8}x+\dfrac{9}{8}\right)$.
c) En déduire les positions relatives de C et T.
d) Tracer C et T.

3- Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, A est le point de coordonnées (1; 1).



A tout réel $m > 1$ on associe le point M de coordonnées (m; 0) et on note N le point où la droite (AM) coupe l'axe des ordonnées.

a) Calculer l'ordonnée du point N.
b) Montrer que l'aire du triangle OMN est égale à $f(m)$.
c) Quelle est la position du point M telle que l'aire du triangle OMN soit minimale?

Exercice 2

On considère deux points A et B tels que AB = 4.
Le but de cet exercice est de déterminer de trois façons différentes l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB}=5$.

Question préliminaire :
Montrer que $\frac{MA}{MB}=5$ est équivalent à $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Méthode 1
On considère les points G barycentre de (A; 1), (B; 5) et G' barycentre de (A; 1) et (B; – 5).
1- Exprimer $\vec{AG}$ et $\vec{AG'}$ en fonction de $\vec{AB}$.
2- Ecrire plus simplement les sommes $\vec{MA}+5\ \vec{MB}$ et $\vec{MA}-5\ \vec{MB}$.
3- En calculant le produit scalaire $(\vec{MA}+5\ \vec{MB})\cdot(\vec{MA}-5\ \vec{MB})$, exprimer $MA^2 - 25MB^2$ en fonction de $\vec{MG}$ et $\vec{MG'}$.
4- En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Méthode 2
Soit K le point défini par $\vec{AK}=\frac{25}{24}\vec{AB}$.
1- Montrer que K est le barycentre de (A; 1) et (B; – 25).
2- Calculer KA^2 et KB^2.
3- Montrer que $MA^2 - 25MB^2 = -24MK^2 + \frac{50}{3}$ (on pourra utiliser les décompositions $\vec{MA}=\vec{MK}+\vec{KA}$ et $\vec{MB}=\vec{MK}+\vec{KB}$).
4- En déduire l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Méthode 3
Le plan est muni du repère orthonormal (A; $\vec{i}, \vec{j}$) avec $\vec{i}=\frac{1}{4}\vec{AB}$.
1- Quelles sont les coordonnées de A et B ?
2- Exprimer $MA^2 - 25MB^2$ en fonction des coordonnées (x, y) du point M.
3- En déduire l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - 25MB^2 = 0$.

Conclusion
Vérifier que les 3 méthodes donnent bien le même résultat.
Faire une figure faisant apparaître les points A, B, G, G' et K, ainsi que l'ensemble cherché.