

# Correction de l'épreuve commune de Première S

## Exercice 1

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{7}$  et  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-2u_n}$ .

1- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ . La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ?

$$u_1 = \frac{u_0}{1-2u_0} = \frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{2}{7}} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{5}{7}} = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{u_1}{1-2u_1} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

Comme  $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$  la suite  $(u_n)$  n'est pas arithmétique.

Comme  $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$  la suite  $(u_n)$  n'est pas géométrique.

2- On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = \frac{1}{u_n}$ . Calculer  $v_0, v_1$  et  $v_2$ . Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de la suite  $(v_n)$  ?

$$v_0 = \frac{1}{u_0} = 7, \quad v_1 = \frac{1}{u_1} = 5 \quad \text{et} \quad v_2 = \frac{1}{u_2} = 3.$$

La suite  $(v_n)$  semble être arithmétique de raison  $-2$ .

3- Montrer que  $v_{n+1} - v_n$  est une constante. En déduire une expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .

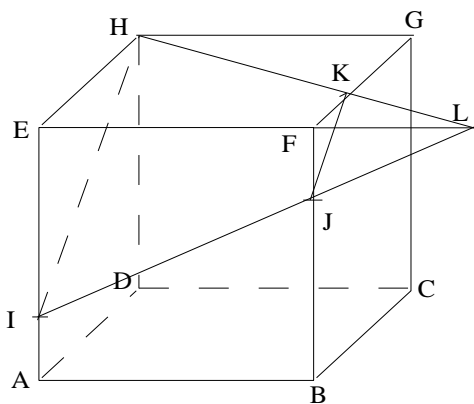
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-2u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{-2u_n}{u_n} = -2. \quad \text{Ceci montre que } (v_n) \text{ est bien une suite arithmétique de raison } -2. \text{ Comme son premier terme est } v_0 = 7, \text{ on a } v_n = 7 - 2n.$$

4- Calculer  $u_{50}$ .

$$\text{D'après ce qui précède, } v_{50} = 7 - 2 \times 50 = -93. \text{ Comme } v_n = \frac{1}{u_n}, \text{ } -93 = \frac{1}{u_{50}} \text{ et donc}$$

$$u_{50} = \frac{-1}{93}.$$

## Exercice 2



On considère le cube ABCDEFGH représenté sur la figure.

1- Reproduire cette figure et placer les points I, J et K définis par  $\vec{AI} = \frac{1}{4} \vec{AE}$ ,  $\vec{BJ} = \frac{3}{4} \vec{BF}$  et  $\vec{FK} = \frac{1}{3} \vec{FG}$ .

2- Déterminer le réel  $x$  tel que  $\vec{IH} = x \vec{JK}$ . Que peut-on en déduire pour les droites (IH) et (JK), puis pour les points H, I, J et K ?

$$\vec{IH} = \vec{IE} + \vec{EH} = \frac{3}{4} \vec{AE} + \vec{EH} \text{ et } \vec{JK} = \vec{JF} + \vec{FK} = \frac{1}{4} \vec{BF} + \frac{1}{3} \vec{FG} = \frac{1}{4} \vec{AE} + \frac{1}{3} \vec{EH}.$$

On remarque que  $3\vec{JK} = \frac{3}{4} \vec{AE} + \vec{EH} = \vec{IH}$ . Donc  $x = 3$ .

Les droites (JK) et (IH) sont parallèles. Les points J, K, I et H sont coplanaires.

3- Déterminer le réel  $y$  tel que  $\vec{EI} = y \vec{FJ}$ .

$$\vec{EI} = \frac{3}{4} \vec{EA} \text{ et } \vec{FJ} = \frac{1}{4} \vec{FB} = \frac{1}{4} \vec{EA}, \text{ donc } \vec{EI} = 3 \vec{FJ}.$$

4- La droite (IJ) coupe la droite (EF) au point L. Montrer que  $\vec{EL} = 3 \vec{FL}$ .

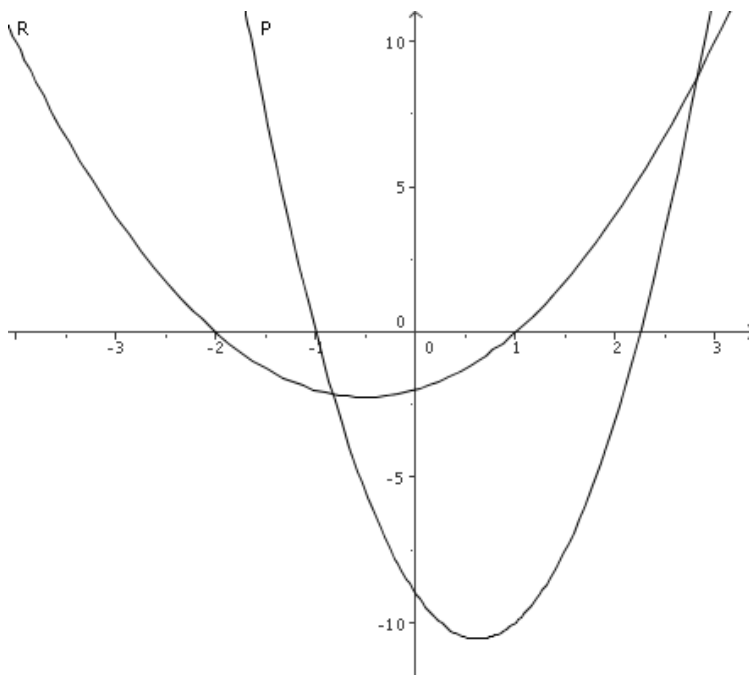
Comme (FJ)//(EI), on applique le th. de Thalès dans le triangle EIL. Il existe donc un réel  $k$  tel que  $\vec{EI} = k \vec{FJ}$  et  $\vec{EL} = k \vec{FL}$ . Comme  $\vec{EI} = 3 \vec{FJ}$ ,  $k = 3$  et  $\vec{EL} = 3 \vec{FL}$ .

5- Démontrer que les points H, K et L sont alignés.

Les points H, K et L sont à la fois dans le plan (EFG) et dans le plan (IJK), il sont donc sur la droite intersection de ces deux plans et par conséquent sont alignés.

### Exercice 3

La figure donne les représentations graphiques P et R des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x^2 - 5x - 9$  et  $g(x) = x^2 + x - 2$ .



1- Résoudre les équations  $f(x) = 0$  et  $g(x) = 0$ . En déduire la fonction associée à P et celle associée à R.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 9 = 0$ . Le discriminant de cette équation du second degré est  $\Delta = 25 + 4 \times 4 \times 9 = 169 = 13^2$ . L'équation a donc deux solutions qui sont

$x_1 = \frac{5+13}{8} = \frac{9}{4}$  et  $x_2 = \frac{5-13}{8} = -1$ . Il s'agit des abscisses des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses, c'est donc la courbe P qui est la représentation graphique de la fonction  $f$ .

$g(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$ . Le discriminant de cette équation est  $\Delta = 1 + 4 \times 1 \times 2 = 9$ . On a

donc deux solutions  $x_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$  et  $x_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$ . C'est la courbe R qui est la représentation graphique de la fonction  $g$ .

2- Déterminer les abscisses des points d'intersection de P et R.

Les abscisses des points d'intersection de P et R sont solution de l'équation  $f(x) = g(x)$ , soit  $4x^2 - 5x - 9 = x^2 + x - 2$ , ou encore  $3x^2 - 6x - 7 = 0$ . Le discriminant de cette équation du second degré est  $\Delta = 36 + 4 \times 3 \times 7 = 120$ . On a donc deux solutions qui sont

$$x_1 = \frac{6 + \sqrt{120}}{6} = \frac{6 + 2\sqrt{30}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{30}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6 - \sqrt{120}}{6} = \frac{6 - 2\sqrt{30}}{6} = 1 - \frac{\sqrt{30}}{3}.$$

3- Résoudre l'inéquation  $f(x) > g(x)$

$f(x) > g(x) \Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 9 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 7 > 0$ . Ce trinôme du second degré est positif partout sauf entre ses racines. L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc

$$\left] -\infty; 1 - \frac{\sqrt{30}}{3} \right[ \cup \left] 1 + \frac{\sqrt{30}}{3}; +\infty \right[.$$

On peut vérifier graphiquement que P est au dessus de R pour  $x$  appartenant à cet ensemble.

## Exercice 4

Dans l'espace muni du repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère les points A(2; -1; 3), B(4; 0; 1) et D(8; -2; 7).

1- Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

On a  $\vec{OA}(2; -1; 3)$  et  $\vec{OB}(4; 0; 1)$ . S'il existait un réel  $k$  tel que  $\vec{OA} = k\vec{OB}$ , on aurait à la fois  $2 = 4k$ ,  $-1 = 0k$  et  $3 = k$ , ce qui n'est pas possible. Les vecteurs  $\vec{OA}$  et  $\vec{OB}$  ne sont donc pas colinéaires et les points O, A et B ne sont pas alignés.

2- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{OD} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ . Que peut-on en déduire ?

On cherche deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{OD} = a\vec{OA} + b\vec{OB}$ , ce qui donne pour les coordonnées

$$\begin{cases} 2a + 4b = 8 \\ -a = -2 \\ 3a + b = 7 \end{cases}. \text{ Ce système n'a qu'une solution qui est } a = 2 \text{ et } b = 1.$$

Ainsi  $\vec{OD} = 2\vec{OA} + \vec{OB}$ , ce qui montre que les points O, A, B et D sont coplanaires.

3- Montrer que les droites (OD) et (AB) sont sécantes. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection L.

Les vecteurs  $\vec{OD}(8; -2; 7)$  et  $\vec{AB}(2; 1; -2)$  n'étant pas colinéaires, les droites (OD) et (AB) ne sont pas parallèles. Comme elles sont coplanaires dans le plan (OAB), elles sont sécantes.

Comme L est sur (OD), il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{OL} = k\vec{OD}$  d'où 
$$\begin{cases} x_L = 8k \\ y_L = -2k \\ z_L = 7k \end{cases}.$$

Comme L est sur (AB), il existe un réel  $k'$  tel que  $\vec{AL} = k'\vec{AB}$  d'où 
$$\begin{cases} x_L - 2 = 2k' \\ y_L + 1 = k' \\ z_L - 3 = -2k' \end{cases}.$$

On en tire 
$$\begin{cases} 8k - 2 = 2k' \\ -2k + 1 = k' \\ 7k - 3 = -2k' \end{cases}, \text{ ce qui donne } k = \frac{1}{3} \text{ et } k' = \frac{1}{3}.$$

Les coordonnées de L sont donc  $\left(\frac{8}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ .

*Autre solution :*

On se place dans le plan (OAB) muni du repère  $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$ . Comme  $\vec{OD} = 2\vec{OA} + \vec{OB}$ , le point D a, avec ce repère, (2; 1) comme coordonnées. De plus O(0; 0), A(1; 0) et B(0; 1).

La droite (OD) admet  $y = 2x$  comme équation et la droite (AB) admet  $x + y = 1$  comme

équation. On en déduit que les coordonnées de L dans le repère  $(O, \vec{OA}, \vec{OB})$  sont  $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

donc que  $\vec{OL} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$ . En revenant aux coordonnées de l'espace, on retrouve

$L\left(\frac{8}{3}; \frac{-2}{3}; \frac{7}{3}\right)$ .