

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + 9x + 12}{4x + 4}$.

On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- Déterminer les réels a , b et c tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{4x + 4}$.

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{4x + 4} &= \frac{(ax + b)(4x + 4) + c}{4x + 4} = \frac{4ax^2 + 4bx + 4ax + 4b + c}{4x + 4} \\ &= \frac{4ax^2 + x(4b + 4a) + 4b + c}{4x + 4}. \end{aligned}$$

Pour que cette expression soit égale à $f(x)$, il suffit que :

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b + 4a = 9 \\ 4b + c = 12 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a = 1/4 \\ b = 2 \\ c = 4 \end{cases}. \text{ On a donc } f(x) = \frac{1}{4}x + 2 + \frac{4}{4x + 4} = \frac{1}{4}x + 2 + \frac{1}{x + 1}.$$

2- Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de l'ensemble de définition. En déduire l'existence d'éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

Lorsque x tend vers l'infini, $\frac{1}{x + 1}$ tend vers 0 et $\frac{1}{4}x + 2$ tend vers l'infini avec le signe de x , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

Lorsque x tend vers -1 , $\frac{1}{4}x + 2$ tend vers $\frac{7}{4}$ et $\frac{1}{x + 1}$ tend vers l'infini, le signe dépendant de la façon dont x tend vers -1 , donc $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$; la droite d'équation $x = -1$ est donc une asymptote verticale.

3- Calculer $f'(x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.

$f'(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{(x + 1)^2} = \frac{(x + 1)^2 - 4}{4(x + 1)^2} = \frac{(x + 3)(x - 1)}{4(x + 1)^2}$. Comme le dénominateur est positif, le signe de $f'(x)$ dépend de celui de $(x + 3)(x - 1)$ qui est un trinôme du second degré dont les racines sont -3 et 1 . Ainsi $f'(x)$ est négatif entre -3 et 1 et positif ailleurs.

4- Construire le tableau de variation de f .

Comme $f(-3) = \frac{3}{4}$ et $f(1) = \frac{11}{4}$, on obtient :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{3}{4}$	$\searrow -\infty$	$\nearrow +\infty$	$\searrow \frac{11}{4}$	$\nearrow +\infty$

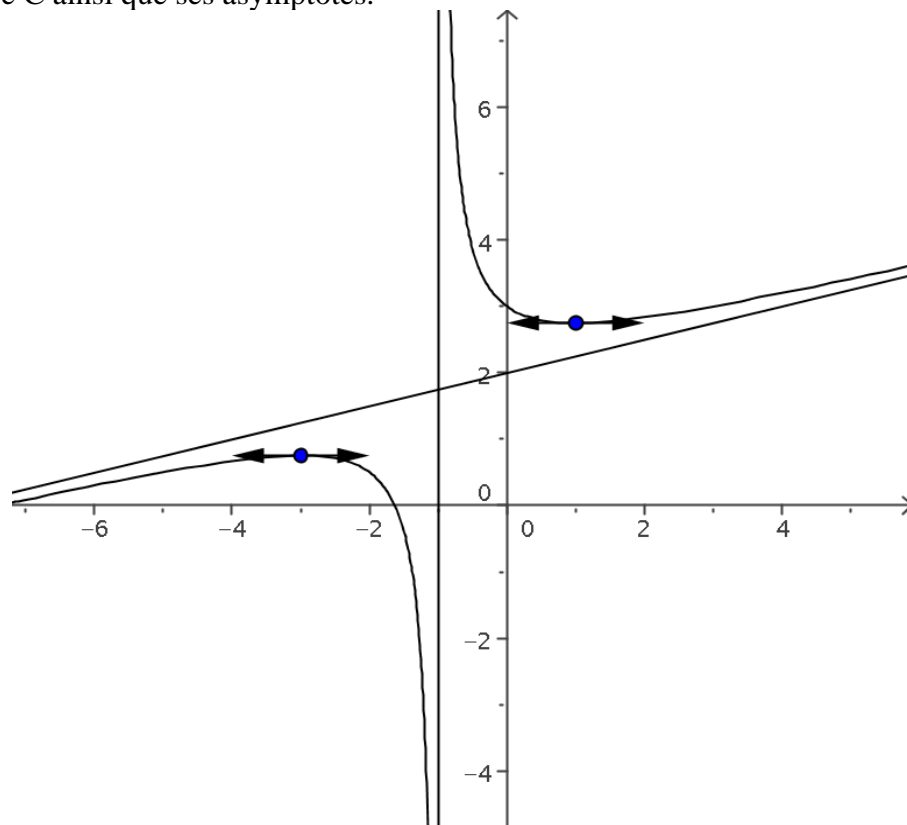
5- Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{4} + 2$ est une asymptote à la courbe C, puis étudier la position relative de C et Δ .

$f(x) - \left(\frac{x}{4} + 2\right) = \frac{1}{x+1}$. Donc $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - \left(\frac{x}{4} + 2\right) = 0$. Ceci montre que la droite Δ d'équation $y = \frac{x}{4} + 2$ est une asymptote à la courbe C.

Si $x > -1$, $\frac{1}{x+1} > 0$, donc $f(x) > \frac{x}{4} + 2$ et la courbe C est au dessus de Δ .

Si $x < -1$, $\frac{1}{x+1} < 0$, donc $f(x) < \frac{x}{4} + 2$ et la courbe C est en dessous de Δ .

6- Tracer la courbe C ainsi que ses asymptotes.



7- La courbe C semble admettre un centre de symétrie. Quelles sont ses coordonnées ? Démontrer que ce point est bien un centre de symétrie.

Il semble que le point $\Omega(-1, \frac{7}{4})$, intersection des deux asymptotes, soit un centre de symétrie pour la courbe.

On a $f(-1+h) = \frac{-1+h}{4} + 2 + \frac{1}{h} = \frac{7}{4} + \frac{h}{4} + \frac{1}{h}$, et $f(-1-h) = \frac{7}{4} - \frac{h}{4} - \frac{1}{h}$, donc

$\frac{f(-1+h) + f(-1-h)}{2} = \frac{7}{4}$, ce qui montre que Ω est bien centre de symétrie.

Exercice 2

Dans la classe de Pierre Cortal et Marie Dernan il y a 10 garçons et 15 filles.

On décide de choisir les deux délégués au hasard.

Calculer les probabilités des évènements suivants :

- Pierre Cortal et Marie Dernan sont délégués
- les deux délégués sont des garçons
- les deux délégués sont des filles
- les deux délégués sont un garçon et une fille

Il y a 25 élèves dans la classe. Lorsqu'on choisit 2 élèves, on a 25 choix possibles pour le premier et 24 pour le second. Cela donne $25 \times 24 = 600$ choix possibles.

a) Pour que Pierre et Marie soient délégués, on peut les choisir dans l'ordre Pierre puis Marie, ou Marie puis Pierre. Cela donne 2 choix possibles.

La probabilité que Pierre et Marie soient délégués est donc $\frac{2}{600} = \frac{1}{300}$.

b) Pour que les deux délégués soient des garçons, on a 10 choix possibles pour le premier et seulement 9 pour le second. Cela donne $10 \times 9 = 90$ choix possibles.

La probabilité que les deux délégués soient des garçons est donc $\frac{90}{600} = \frac{3}{20}$.

c) Pour que les deux délégués soient des filles, on a 15 choix possibles pour la première et seulement 14 pour la seconde. Cela donne $15 \times 14 = 210$ choix possibles.

La probabilité que les deux délégués soient des filles est donc $\frac{210}{600} = \frac{7}{20}$.

d) Sur les 600 choix possibles on en compte 90 avec 2 garçons et 210 avec 2 filles. Il reste donc $600 - 90 - 210 = 300$ choix avec un garçon et une fille.

La probabilité que les deux délégués soient un garçon et une fille est donc $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par l'arbre suivant :

