

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

Soit OBD un triangle rectangle et isocèle direct en O avec $(\vec{OB}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{2}$.

On pose $OB = OD = b$ ($b > 0$).

A est un point du segment [OB] et C est un point du segment [OD] tel que $OC = OA = a$ ($a > 0$).

I est le milieu de [AD].

Le but de l'exercice est de montrer, avec deux méthodes différentes, que les droites (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Méthode 1

On choisit le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{OA} = a\vec{i}$ et $\vec{OD} = b\vec{j}$.

1) Calculer en fonction de a et b les coordonnées de B, C et I.

2) Calculer $\vec{OI} \cdot \vec{BC}$, puis conclure.

Méthode 2

1) Montrer que $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OD}$.

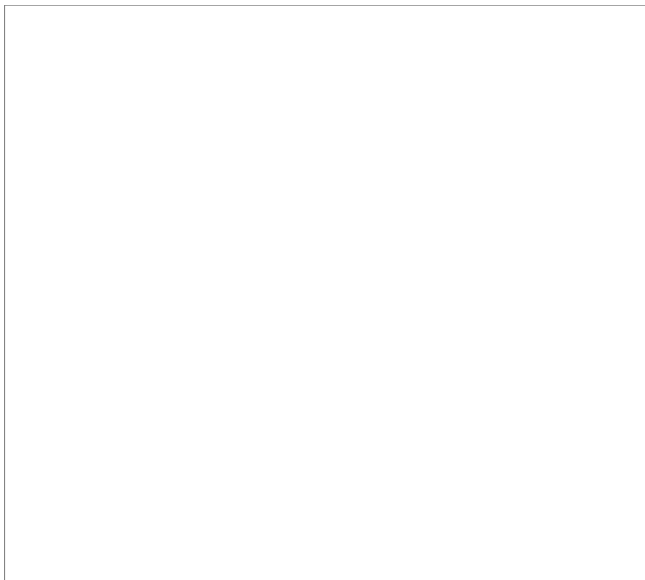
2) Calculer $\vec{OI} \cdot \vec{BC}$, puis conclure.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

1- Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

2-



Soit f la fonction pour laquelle on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Exprimer $f(x)$ en fonction de x .

b) La figure donne la représentation graphique de f sur $[0 ; 4]$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

Compléter cette figure pour faire apparaître les 4 premiers termes de la suite u_n sur l'axe des abscisses.

c) Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de u_n ?

3- On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

a) Calculer v_0, v_1 et v_2 . Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de v_n ?

b) Démontrer la conjecture précédente et en déduire une expression de v_n en fonction de n .

c) Exprimer u_n en fonction de n . En déduire la limite de u_n .