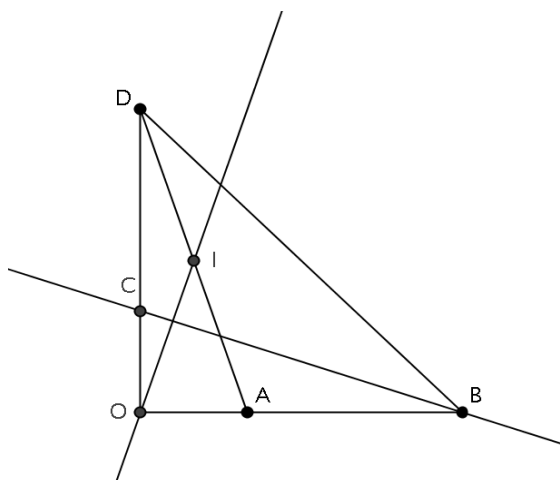


Devoir de Mathématiques

Exercice 1



Soit OBD un triangle rectangle et isocèle direct en O avec $(\vec{OB}, \vec{OD}) = \frac{\pi}{2}$.

On pose $OB = OD = b$ ($b > 0$).

A est un point du segment [OB] et C est un point du segment [OD] tel que $OC = OA = a$ ($a > 0$).

I est le milieu de [AD].

Le but de l'exercice est de montrer, avec deux méthodes différentes, que les droites (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Méthode 1

On choisit le repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $\vec{OA} = a\vec{i}$ et $\vec{OD} = b\vec{j}$.

1) Calculer en fonction de a et b les coordonnées de B, C et I.

2) Calculer $\vec{OI} \cdot \vec{BC}$, puis conclure.

1) On a $B(b, 0)$, $C(0, a)$, $A(a, 0)$ et $D(0, b)$.

Comme I est le milieu de [AD], $I\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

2) On a $\vec{OI}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ et $\vec{BC}(-b, a)$. Alors $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = -b \times \frac{a}{2} + a \times \frac{b}{2} = 0$.

Comme $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = 0$, les droites (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Méthode 2

1) Montrer que $2\vec{OI} = \vec{OA} + \vec{OD}$.

2) Calculer $\vec{OI} \cdot \vec{BC}$, puis conclure.

1) $\vec{OA} + \vec{OD} = \vec{OI} + \vec{IA} + \vec{OI} + \vec{ID} = 2\vec{OI} + \vec{IA} + \vec{ID}$. Comme I est le milieu de [AD], $\vec{IA} + \vec{ID} = \vec{0}$

donc $\vec{OA} + \vec{OD} = 2\vec{OI}$ et $\vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD})$.

2) $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OD}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{OA} \cdot \vec{BO} + \vec{OA} \cdot \vec{OC} + \vec{OD} \cdot \vec{BO} + \vec{OD} \cdot \vec{OC})$.

Or, $\vec{OA} \cdot \vec{BO} = -ab$ car \vec{OA} et \vec{BO} sont colinéaires de sens opposés;

$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$ car \vec{OA} et \vec{OC} sont orthogonaux;

$\vec{OD} \cdot \vec{BO} = 0$ car \vec{OD} et \vec{BO} sont orthogonaux;

$\vec{OD} \cdot \vec{OC} = ab$ car \vec{OD} et \vec{OC} sont colinéaires de même sens.

Finalement, $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = \frac{1}{2}(-ab + ab) = 0$.

Comme $\vec{OI} \cdot \vec{BC} = 0$, les droites (BC) et (OI) sont perpendiculaires.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

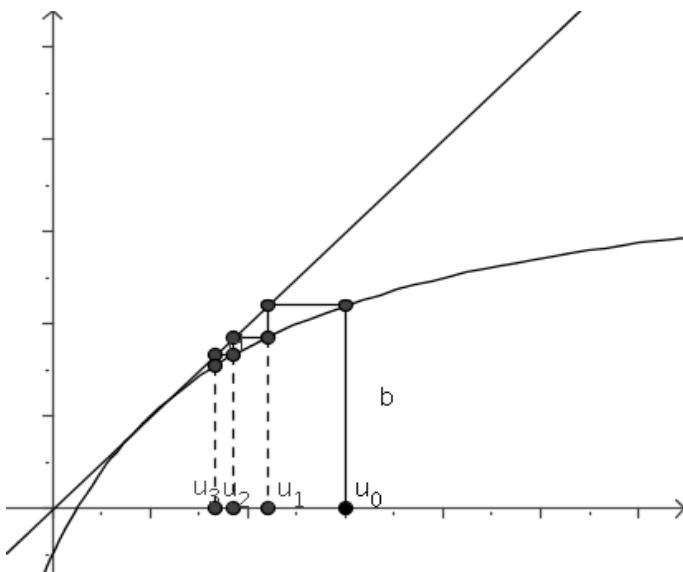
1- Calculer u_1 et u_2 . La suite (u_n) est-elle arithmétique ou géométrique ?

$$u_1 = \frac{4u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{11}{5} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{4u_1 - 1}{u_1 + 2} = \frac{\frac{44}{5} - 1}{\frac{11}{5} + 2} = \frac{39}{5} \times \frac{5}{21} = \frac{39}{21} = \frac{13}{7}.$$

Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, la suite (u_n) n'est pas arithmétique.

Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, la suite (u_n) n'est pas géométrique.

2-



Soit f la fonction pour laquelle on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Exprimer $f(x)$ en fonction de x .
- La figure donne la représentation graphique de f sur $[0 ; 4]$ ainsi que la droite d'équation $y = x$.

Compléter cette figure pour faire apparaître les 4 premiers termes de la suite u_n sur l'axe des abscisses.

- Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de u_n ?

a) Avec $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ on a bien $u_{n+1} = f(u_n)$.

b) voir figure

c) La suite (u_n) semble converger vers 1.

3- On pose $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$.

- Calculer v_0 , v_1 et v_2 . Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de v_n ?
- Démontrer la conjecture précédente et en déduire une expression de v_n en fonction de n .
- Exprimer u_n en fonction de n . En déduire la limite de u_n .

$$a) \quad v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}; \quad v_1 = \frac{1}{u_1 - 1} = \frac{1}{\frac{11}{5} - 1} = \frac{5}{6}; \quad v_2 = \frac{1}{u_2 - 1} = \frac{1}{\frac{13}{7} - 1} = \frac{7}{6}.$$

On a $v_1 - v_0 = \frac{1}{3}$ et $v_2 - v_1 = \frac{1}{3}$. La suite (v_n) semble être arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

$$\text{b) } v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{4u_n-1}{u_n+2}-1} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{1}{\frac{3u_n-3}{u_n+2}} - \frac{1}{u_n-1} = \frac{u_n+2}{3u_n-3} - \frac{1}{u_n-1} =$$

$$\frac{u_n-1}{3(u_n-1)} = \frac{1}{3}. \text{ La suite } (v_n) \text{ est donc bien une suite arithmétique de raison } \frac{1}{3}.$$

$$\text{On a donc } v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n = \frac{3+2n}{6}.$$

$$\text{c) Comme } v_n = \frac{1}{u_n-1}, u_n-1 = \frac{1}{v_n} \text{ et } u_n = 1 + \frac{1}{v_n} = 1 + \frac{6}{3+2n}.$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{3+2n} = 0, \text{ on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$