

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $[5; 20]$ par $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1000}{x}$.

a) Calculer sa dérivée et vérifier que $f'(x) = \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}$.

$$f'(x) = x - \frac{1000}{x^2} = \frac{x^3 - 1000}{x^2} = \frac{(x-10)(x^2+10x+100)}{x^2}.$$

b) Construire le tableau des variations de f sur $[5; 20]$. Quel est le minimum de f sur $[5; 20]$?

$x^2 + 10x + 100$ est un trinôme du second degré dont le discriminant Δ est égal à -300 .

$x^2 + 10x + 100$ est donc toujours positif. Comme x^2 est aussi toujours positif, $f'(x)$ a le même signe que $x - 10$. D'où le tableau de variations :

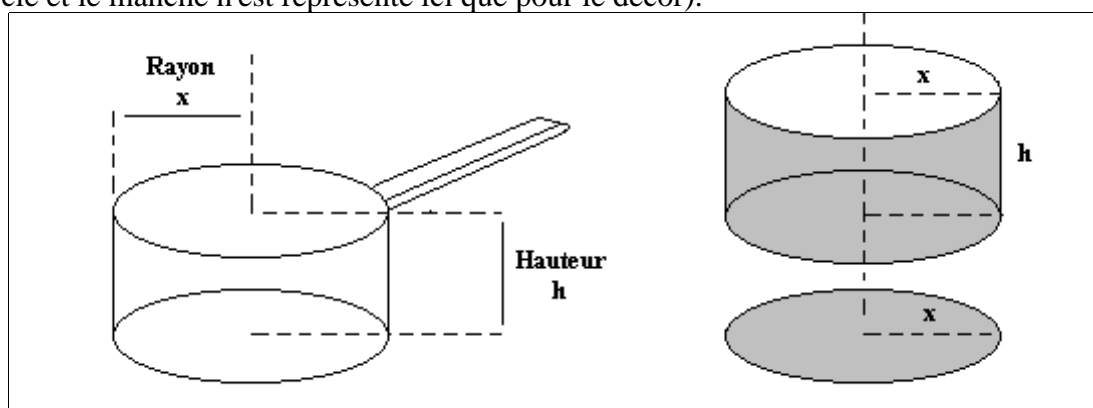
x	5		10		20
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	212,5		150		250

On a calculé $f(5) = \frac{25}{2} + \frac{1000}{5} = 212,5$; $f(10) = \frac{100}{2} + \frac{1000}{10} = 150$;

$f(20) = \frac{400}{2} + \frac{1000}{20} = 250$.

Le minimum de f sur $[5; 20]$ est donc 150, il est atteint pour $x = 10$.

2. Une casserole est constituée d'un fond de rayon x et d'un cylindre de hauteur h (il n'y a pas de couvercle et le manche n'est représenté ici que pour le décor).



a) Exprimer la surface F du fond en fonction de x , puis la surface latérale L du cylindre et le volume V de la casserole, en fonction de x et h .

$$F = \pi x^2; L = 2\pi xh; V = \pi x^2 h.$$

b) On souhaite construire une casserole de volume imposé $1000\pi \text{ cm}^3$. Calculer h en fonction de x et exprimer la surface totale de tôle $S(x)$ nécessaire.

Si $V = 1000\pi$, on a $1000\pi = \pi x^2 h$, donc $h = \frac{1000}{x^2}$.

On en déduit que $L = 2\pi x h = 2\pi x \times \frac{1000}{x^2} = \frac{2000\pi}{x}$. La surface totale de tôle nécessaire

est $S(x) = F + L = \pi x^2 + \frac{2000\pi}{x}$.

3. a) Montrer que $S(x) = 2\pi f(x)$ où f est la fonction étudiée dans la question 1. En déduire les variations, sur l'intervalle $[5; 20]$, de la fonction S .

$$2\pi f(x) = 2\pi \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1000}{x} \right) = \pi x^2 + \frac{2000\pi}{x} = S(x).$$

Comme $S(x) = 2\pi f(x)$, $S'(x) = 2\pi f'(x)$ et S a les mêmes variations que f .

Sur $[5; 10]$, S est décroissante de 450π à 300π ;

sur $[10; 20]$, S est croissante de 300π à 500π .

b) Quelles sont les dimensions d'une casserole de $1000\pi \text{ cm}^3$ qui utilise le moins de tôle possible ? Quelle est alors la surface utilisée ?

D'après ce qui précède, une casserole de $1000\pi \text{ cm}^3$ qui utilise le moins de tôle possible a un rayon de 10 cm. Sa hauteur est $\frac{1000}{10^2} = 10$ cm. La surface de tôle utilisée est $300\pi \text{ cm}^2$.

Rappels :

L'aire d'un disque de rayon r est πr^2 ; le périmètre d'un cercle de rayon r est $2\pi r$;

On obtient le volume d'un cylindre en multipliant l'aire de la base par la hauteur.

Exercice 2

Soit H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

1. Déterminer les coordonnées du point A de H d'abscisse $\frac{2}{3}$, puis une équation de la tangente T à H en ce point.

Les coordonnées de A sont $x_A = \frac{2}{3}$ et $y_A = \frac{1}{x_A} = \frac{3}{2}$.

H est la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$.

On a donc $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$. L'équation de la tangente à H en A est :

$$y = f' \left(\frac{2}{3} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) + f \left(\frac{2}{3} \right). \text{ Comme } f' \left(\frac{2}{3} \right) = -1 \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{-9}{4} \text{ et comme } f \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{3}{2}, \text{ cette}$$

équation est finalement $y = \frac{-9}{4} \left(x - \frac{2}{3} \right) + \frac{3}{2}$, soit $y = \frac{-9}{4}x + 3$.

2. Déterminer les coordonnées des points B et C intersections de T avec les axes de coordonnées. Vérifier que A est le milieu de $[BC]$.

T coupe l'axe des abscisses en B avec $y_B = 0$, d'où $\frac{-9}{4}x_B + 3 = 0$ et $x_B = \frac{4}{3}$.

T coupe l'axe des ordonnées en C avec $x_C = 0$, d'où $y_C = 3$.

Les coordonnées du milieu de [BC] sont :

$\frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2}{3}$ et $\frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3}{2}$. Il s'agit des coordonnées de A, donc A est bien le milieu de [BC].

3. Généralisation : reprendre les questions précédentes avec le point A d'abscisse a .

L'équation de la tangente en a est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, soit

$$y = \frac{-1}{a^2}(x - a) + \frac{1}{a}, \text{ soit encore } y = \frac{-1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

Cette tangente coupe l'axe des abscisses en B avec $y_B = 0$, et donc $\frac{-1}{a^2}x_B + \frac{2}{a} = 0$, d'où

$x_B = 2a$. Elle coupe l'axe des ordonnées en C avec $x_C = 0$, et donc $y_C = \frac{2}{a}$.

Les coordonnées du milieu de [BC] sont $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, c'est à dire les coordonnées du point de tangence.

Question bonus : en déduire une méthode géométrique de la construction des tangentes à H .

Pour tracer la tangente en un point A de H , on peut, par exemple :

- construire D symétrique de O par rapport à A.
- construire ensuite B et C projections de D sur les axes.
- comme OBDC est un parallélogramme de centre A, A est le milieu de [BC], donc, d'après ce qui précède, la droite (BC) est la tangente à H en A.