

# Devoir de Mathématiques

## Exercice 1

Résoudre l'équation  $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} = \frac{1}{3}$ .

Cette équation est définie pour  $x \neq 0$  et  $x \neq -4$ .

En réduisant au même dénominateur, elle devient :

$$\frac{3(x+4) - 3x - x(x+4)}{3x(x+4)} = 0, \text{ soit } \frac{-x^2 - 4x + 12}{3x(x+4)} = 0.$$

Un quotient est nul si et seulement si son numérateur est nul; l'équation est donc équivalente à  $-x^2 - 4x + 12 = 0$ . Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est :

$\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-1) \times 12 = 64$ . L'équation a donc deux solutions qui sont :

$$x_1 = \frac{4 + \sqrt{64}}{-2} = -6 \text{ et } x_2 = \frac{4 - \sqrt{64}}{-2} = 2.$$

## Exercice 2

On considère le polynôme P défini par  $P(x) = x^3 - 8x - 3$ .

1- Calculer P(3), puis déterminer les réels a, b et c tels que  $P(x) = (x-3)(ax^2 + bx + c)$ .

$$P(3) = 3^3 - 8 \times 3 - 3 = 27 - 24 - 3 = 0.$$

$$(x-3)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx - 3ax^2 - 3bx - 3c = ax^3 + (b-3a)x^2 + (c-3b)x - 3c.$$

$$\text{Pour que ceci soit égal à } P(x), \text{ il suffit que } \begin{cases} a=1 \\ b-3a=0 \\ c-3b=-8 \\ -3c=-3 \end{cases}, \text{ soit } \begin{cases} a=1 \\ b=3 \\ c=1 \end{cases}.$$

$$\text{Ainsi } P(x) = (x-3)(x^2 + 3x + 1).$$

2- Résoudre l'équation  $P(x) = 0$ .

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2 + 3x + 1) = 0. \text{ Ainsi :}$$

- soit  $x - 3 = 0$  et alors  $x = 3$

- soit  $x^2 + 3x + 1 = 0$ ; le discriminant de cette équation du second degré est

$$\Delta = 3^2 - 4 = 5; \text{ elle a donc deux solutions } x_1 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'équation  $P(x) = 0$  est donc

$$S = \left\{ 3; \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}; \frac{-3 - \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

3- Etudier le signe de P(x) et en déduire les solutions de l'inéquation  $P(x) \geq 0$ .

On construit le tableau de signes suivant en tenant compte du fait que  $x_1 < x_2 < 3$ .

On obtient :

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$3$	$+\infty$
$x-3$	-	-	-	0	+
$x^2+3x+1$	+	0	0	+	+
$P(x)$	-	0	0	-	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation  $P(x) \geq 0$  est donc  $S = [x_1; x_2] \cup [3; +\infty[$ ,

avec  $x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$  et  $x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ .

### Exercice 3

1- Résoudre l'équation  $2u^2 + 5u - 3 = 0$  et en déduire une factorisation de  $2u^2 + 5u - 3$ .

Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est  $\Delta = 25 + 24 = 49$ .

Elle a donc deux solutions qui sont :  $u_1 = \frac{-5+\sqrt{49}}{4} = \frac{1}{2}$  et  $u_2 = \frac{-5-\sqrt{49}}{4} = -3$ .

On en déduit la factorisation :  $2u^2 + 5u - 3 = 2(u - \frac{1}{2})(u + 3)$ .

2- Utiliser le résultat précédent pour résoudre les équations :

a)  $2x^4 + 5x^2 - 3 = 0$

En posant  $u = x^2$ , on obtient  $2u^2 + 5u - 3 = 0$ , soit  $2(u - \frac{1}{2})(u + 3) = 0$ .

Ce qui donne  $2(x^2 - \frac{1}{2})(x^2 + 3) = 0$ . D'où :

- soit  $x^2 = \frac{1}{2}$ , c'est à dire  $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  ou  $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ .

- soit  $x^2 + 3 = 0$  ce qui n'est pas possible car  $x^2 \geq 0$ .

L'équation a donc deux solutions qui sont  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ .

b)  $\frac{2}{x^2} + \frac{5}{x} - 3 = 0$

Cette équation est définie pour  $x \neq 0$ . En posant  $u = \frac{1}{x}$ , on obtient  $2u^2 + 5u - 3 = 0$ ,

soit  $2(u - \frac{1}{2})(u + 3) = 0$ . Ce qui donne  $2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x} + 3\right) = 0$ . D'où :

soit  $\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$  et alors  $x = 2$ ; soit  $\frac{1}{x} = -3$  et alors  $x = -\frac{1}{3}$ .

L'équation a donc deux solutions qui sont 2 et  $-\frac{1}{3}$ .

## Exercice 4

A l'occasion d'une tombola, une somme de 2040€ doit être répartie également entre les gagnants. Deux de ces derniers ne se manifestant pas, la part de chacun est alors augmentée de 85€. Combien avait-on prévu de gagnants et combien chacun d'entre eux devait-il recevoir ?

Appelons  $n$  le nombre initial de gagnants et  $s$  la somme que chacun devait recevoir.

On a alors  $ns = 2040$ .

Comme deux des gagnants ne se manifestent pas, le nombre des gagnants passe à  $n - 2$ . La part de chacun augmente de 85€, elle passe donc à  $s + 85$ .

On a donc aussi  $(n - 2)(s + 85) = 2040$ .

Cette équation est équivalente à  $ns + 85n - 2s - 170 = 2040$ . En tenant compte du fait que

$ns = 2040$ , on obtient  $85n - 2s - 170 = 0$ , qui donne  $s = \frac{85n - 170}{2}$ .

En remplaçant  $s$  par son expression dans  $ns = 2040$ , on trouve  $\frac{85n^2 - 170n}{2} = 2040$ ,

soit  $85n^2 - 170n - 4080 = 0$ . Le discriminant de cette équation du second degré est

$\Delta = (-170)^2 - 4 \times 85 \times (-4080) = 1416100 = 1190^2$ . On a donc deux solutions qui sont

$$n_1 = \frac{170 + 1190}{2 \times 85} = 8 \text{ et } n_2 = \frac{170 - 1190}{2 \times 85} = -6.$$

Comme le nombre de gagnants ne peut pas être négatif, il y avait 8 gagnants qui devaient recevoir chacun la somme de  $\frac{2040}{8} = 255$ €.