Devoir de Mathématiques

Exercice 1

Soit ABCD un tétraèdre.

I est le milieu de [AB], J est le milieu de [CD] et O est le milieu de [IJ].

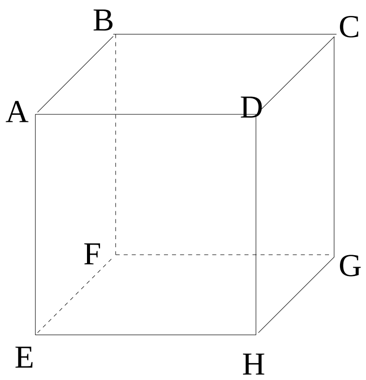
a) Montrer que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$ et que $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$.

> En utilisant la relation de Chasles, on trouve : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}$
>
> Comme I est le milieu de [AB], $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$, donc $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$.
>
> On montre de même que $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$.

b) En déduire $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

> D'après ce qui précède, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}=2\left(\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}\right)$.
>
> Or O est le milieu de [IJ], on a donc $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$, d'où $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$.

Exercice 2

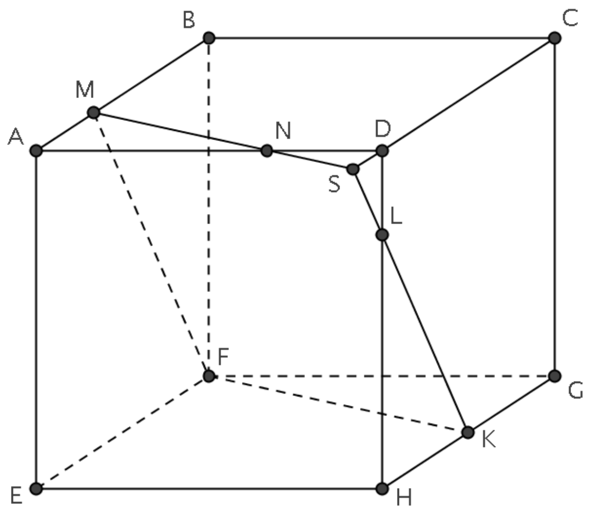


ABCDEFGH est un cube.

On considère les points K, L et M définis par $\overrightarrow{HK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}$,

$\overrightarrow{HL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

1- Figure complète :



2- Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{FM}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{HD}$, puis montrer que les droites (KL) et (FM) sont parallèles. Qu'en déduit-on pour les points K, L, M et F ?

> $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KH}+\overrightarrow{HL}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{HG}+\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}$ et $\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BM}=\frac{-2}{3}\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HD}$.
>
> Calculons $\frac{3}{4}\overrightarrow{FM}$.
>
> $\frac{3}{4}\overrightarrow{FM}=\frac{3}{4}\left(\frac{-2}{3}\overrightarrow{HG}+\overrightarrow{HD}\right)=\frac{-6}{12}\overrightarrow{HG}+\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{HG}+\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}=\overrightarrow{KL}$.
>
> Comme $\frac{3}{4}\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{KL}$, les vecteurs $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{FM}$ sont colinéaires et les droites (KL) et (FM) sont donc parallèles. Des droites parallèles étant coplanaires, cela montre que les points K, L, M et F sont coplanaires.

3- Quelle est l'intersection du plan (KLM) avec le plan (EHG) ? En déduire une construction de l'intersection du plan (KLM) avec le plan (ADC).

> Le plan (KLM) contient les points F et K. Le plan (EHG) contient aussi les points F et K. L'intersection de ces deux plans est donc la droite (FK).
>
> Comme les plans (EHG) et (ADC) sont parallèles, le plan (KLM) les coupent suivant des droites parallèles. L'intersection de (KLM) et (ADC) est donc la parallèle à (FK) passant par M.

4- On appelle N l'intersection du plan (KLM) avec l'arête [AD]. Les droites (MN) et (KL) se coupent au point S. Montrer que S est un point de la droite (CD).

> (MN) est incluse dans le plan (ADC) et (KL) est incluse dans le plan (HDC). L'intersection de (MN) et (KL) se trouve donc dans l'intersection des plans (ADC) et (HDC) qui est la droite (DC). S est donc bien un point de (DC).

5- Quel est le réel k tel que $\overrightarrow{HL}=k\overrightarrow{LD}$? Montrer alors, en utilisant le théorème de Thalès, que $\overrightarrow{SD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$.

> Comme $\overrightarrow{HL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{HD}$, on a $\overrightarrow{LD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{HD}$, donc $\overrightarrow{HL}=3\overrightarrow{LD}$.
>
> Comme (SD) // (HK), d'après le théorème de Thalès, $\overrightarrow{HK}=3\overrightarrow{SD}$, donc
>
> $\overrightarrow{SD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HK}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{HG}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$.

6- Quel est le réel k' tel que $\overrightarrow{AM}=k'\overrightarrow{SD}$? En déduire le réel x tel que $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AD}$.

> On a $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SD}=\frac{1}{6}\overrightarrow{DC}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{SD}$.
>
> Comme (AM) // (SD), d'après le théorème de Thalès, $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{ND}$.
> On en déduit que $\overrightarrow{AN}=2\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AD}\right)=-2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{AD}$, d'où $3\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AD}$ et finalement
>
> $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.