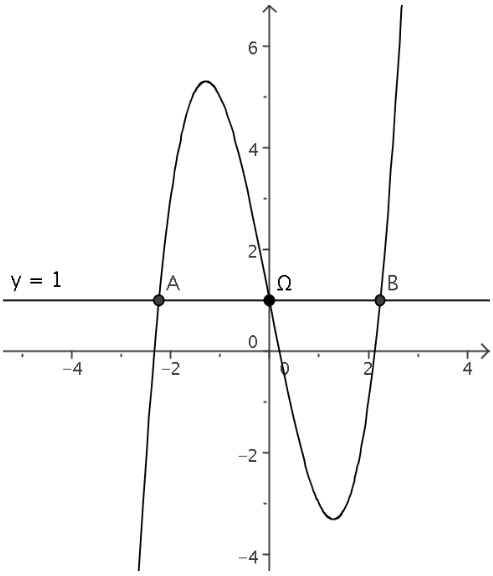
Devoir de Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 5x + 1$.
1- La courbe représentative de f admet un centre de symétrie $\Omega(a, b)$. Déterminer graphiquement les valeurs de a et b, puis démontrer que Ω est bien centre de symétrie.

> On trouve graphiquement $a = 0$ et $b = 1$.
>
> Pour montrer que $\Omega(a, b)$ est bien centre de symétrie de la courbe, il suffit de vérifier que $\frac{f(a+h)+f(a-h)}{2}=b$, pour tout réel h.
>
> Ici, avec $a = 0$ et $b = 1$, on a :
>
> $f(0 + h) = h^3 - 5h + 1$; $f(0 - h) = -h^3 + 5h + 1$; $f(0 + h) + f(0 - h) = 2$
>
> et finalement $\frac{f(0+h)+f(0-h)}{2}=1$, ce qui montre que $\Omega(0,1)$ est bien centre de symétrie.

2- a) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 1$, puis l'inéquation $f(x) < 1$.



> La droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe en 3 points A, B et Ω. L'équation $f(x) = 1$ a donc 3 solutions qui sont les abscisses de ces points, soit $x_\Omega = 0$, $x_A \approx -2{,}3$ et $x_B \approx 2{,}3$.
>
> Les solutions de l'inéquation $f(x) < 1$ correspondent aux points de la courbe qui se trouvent en dessous de la droite d'équation $y = 1$. L'ensemble des solutions est donc $S =]-\infty; x_A[\cup]0; x_B[$.

b) Retrouver les résultats précédents par le calcul.

> a) Equation $f(x) = 1$
>
> $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 - 5x + 1 = 1 \Leftrightarrow x^3 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$
>
> On a donc 3 solutions : $x = 0$ ou $x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$.
>
> b) Inéquation $f(x) < 1$
>
> D'après les calculs précédents, $f(x) < 1 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0$
>
> On construit un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		0		$\sqrt{5}$		$+\infty$
x		–		–	0	+		+	
$x+\sqrt{5}$		–	0	+		+		+	
$x-\sqrt{5}$		–		–		–	0	+	
$f(x)$		–	0	+	0	–	0	+	

> L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < 1$ est donc
> $S =]-\infty; -\sqrt{5}[\cup]0; \sqrt{5}[$.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ sur $[-1; 1]$.
1- Expliquer pourquoi les réels strictement supérieurs à 1 ou strictement inférieurs à – 1 ne peuvent pas avoir d'image par f.

> Pour $x > 1$ ou $x < -1$, $1 - x^2$ est négatif et n'a pas de racine carrée, on ne peut donc pas calculer $\sqrt{1-x^2}$.

2- On considère les fonctions f_1 et f_2 définies sur ℝ par $f_1(x) = 1 - x$ et $f_2(x) = x^2$, ainsi que la fonction f_3 définie sur ℝ+ par $f_3(x) = \sqrt{x}$.
Exprimer f comme composée des fonctions f_1, f_2 et f_3.

> On a $f = f_3 \circ f_1 \circ f_2$. En effet :
>
> $f_3 \circ f_1 \circ f_2(x) = f_3 \circ f_1(x^2) = f_3(1 - x^2) = \sqrt{1-x^2} = f(x)$.

3- Démontrer que f est croissante sur $[-1; 0]$.

> Soient a et b deux réels de $[-1; 0]$ tels que $a < b$.
>
> Si $a < b$, alors $a^2 > b^2$ car la fonction carré est décroissante sur $[-1; 0]$.
>
> Ensuite $1 - a^2 < 1 - b^2$ car la fonction affine f_1 est décroissante sur ℝ.
>
> Enfin, $\sqrt{1-a^2} < \sqrt{1-b^2}$ car la fonction racine carrée est croissante.
>
> Ainsi, si $a < b$, alors $f(a) < f(b)$. La fonction f est donc croissante sur $[-1; 0]$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.
1- Déterminer graphiquement les coordonnées (a, b) du point le plus bas de la courbe représentative de f.

> Le point le plus bas de la courbe a pour coordonnées $(2; -3)$, donc $a = 2$ et $b = -3$.

2- Calculer $d(x) = f(x) - b$ et vérifier que $d(x)$ est toujours supérieur ou égal à 0. Que peut-on en déduire pour b par rapport à f ?

> $d(x) = f(x) - (-3) = x^2 - 4x + 1 + 3 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Comme un carré est toujours positif, on a bien $d(x) \geqslant 0$.
>
> $d(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \geqslant -3$. Comme $f(x) = -3$ pour $x = 2$, cela montre que – 3 est le minimum de f.

3- Vérifier que $f(x) = (x - 2)^2 - 3$, puis résoudre les équations :
a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = -5$
c) $f(x) = -3$

> On a vu que $d(x) = f(x) - (-3) = (x - 2)^2$. On en déduit que $f(x) = (x - 2)^2 - 3$.
>
> a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - \sqrt{3}^2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2 + \sqrt{3})(x - 2 - \sqrt{3}) = 0$.
>
> On a donc 2 solutions : $x = 2 + \sqrt{3}$ ou $x = 2 - \sqrt{3}$.
>
> b) Comme – 3 est le minimum de f, l'équation $f(x) = -5$ n'a pas de solutions.
>
> c) $f(x) = -3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 3 = -3 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$. On a donc une seule solution qui est $x = 2$.