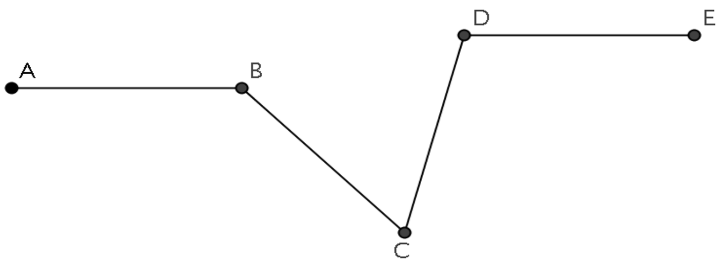
Devoir de Mathématiques

Exercice 1

On considère la figure suivante :



On sait que $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{3\pi}{4}$, que $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{-\pi}{3}$ et que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens.

a) Démontrer que $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\pi$, puis en déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)$.

> En appliquant la relation de Chasles, on trouve :
> $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DE}\right)$.
>
> Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DE}\right)=0$, on a donc $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DE}\right)=\pi$. Finalement, $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{DE}\right)=\pi$.
>
> Nous savons que $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{3\pi}{4}$ et que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{-\pi}{3}$. Le résultat précedent nous donne donc l'égalité : $\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\pi$,
>
> soit $\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}\right)=\pi-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{7\pi}{12}$.

b) Sachant que les 4 segments [AB], [BC], [CD] et [DE] ont même longueur, déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA}\right)$.

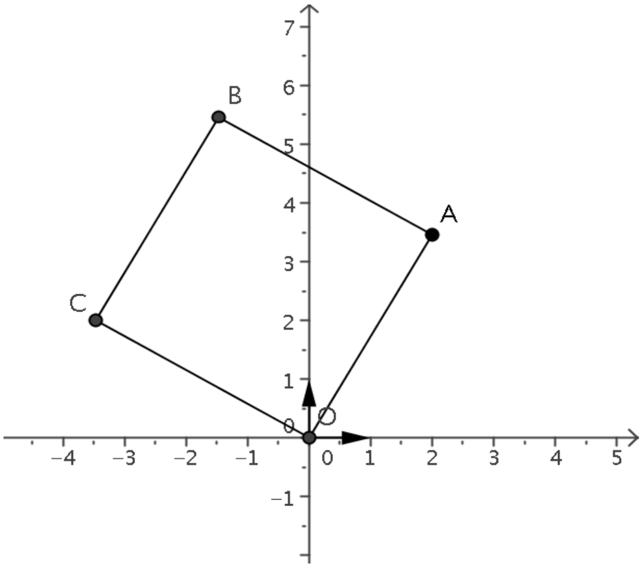
> D'après la relation de Chasles, $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$.
>
> Comme CDE est isocèle en D et comme $\widehat{EDC}=\frac{7\pi}{12}$, $\widehat{DCE}=\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{5\pi}{24}$ et finalement $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{5\pi}{24}$.
>
> De même, avec ABC isocèle en B et $\widehat{ABC}=\frac{3\pi}{4}$, on trouve que $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\frac{\pi}{8}$.
>
> Enfin $\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)=-\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\pi}{3}$.
>
> Ainsi, $\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CA}\right)=\left(\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)=\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{8}=\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 2

$\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est un repère orthonormal direct; A est le point de coordonnées polaires $\left(4,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$.

$OABC$ est le carré tel que $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.

a) Faire une figure.



b) Déterminer les coordonnées polaires de B et C.

[OB] est la diagonale d'un carré de côté 4, donc $OB = 4\sqrt{2}$.

Comme $OABC$ est un carré, $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

Ainsi $\left(\vec{i},\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{12}$.

Les coordonnées polaires de B sont donc $\left(4\sqrt{2};\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

$OC = OA = 4$ et $\left(\vec{i},\overrightarrow{OC}\right)=\left(\vec{i},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}\right)=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{6}$.

Les coordonnées polaires de C sont donc $\left(4;\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

c) Déterminer les coordonnées cartésiennes de A et C, puis en déduire les coordonnées cartésiennes de B en remarquant que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

En utilisant les coordonnées polaires de A, on trouve :

$x_A=4\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4\times\dfrac{1}{2}=2$ et $y_A=4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$.

De même, pour C :

$x_C=4\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=4\times\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$ et $y_C=4\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=4\times\dfrac{1}{2}=2$.

Comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$, $x_B=x_C+x_A=-2\sqrt{3}+2$ et $y_B=y_C+y_A=2+2\sqrt{3}$.

d) En utilisant les coordonnées de *B*, déterminer $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

> Comme les coordonnées de *B* sont $\left(4\sqrt{2}\,;\frac{7\pi}{12}\right)$ et comme ses coordonnées cartésiennes sont $\left(-2\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}+2\right)$, on a :
>
> d'une part $-2\sqrt{3}+2=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, d'où $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{-2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}=\frac{-\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et
>
> d'autre part $2\sqrt{3}+2=4\sqrt{2}\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, d'où $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

e) On se place maintenant dans le repère $\left(O,\vec{j},-\vec{i}\right)$. Il s'agit aussi d'un repère orthonormal direct. Quelles sont les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires de *B* dans ce nouveau repère ?

En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

> Dans le repère $\left(O,\vec{j},-\vec{i}\right)$, les coordonnées cartésiennes de *B* sont $\left(2\sqrt{3}+2,\ 2\sqrt{3}-2\right)$, en effet, si on appelle (x_B, y_B) les coordonnées dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ et (x'_B, y'_B) les coordonnées dans le repère $\left(O,\vec{j},-\vec{i}\right)$, on a $x'_B = y_B$ et $y'_B = -x_B$. (il suffit de tourner sa tête vers le bas et vers la gauche pour le comprendre)
>
> Comme $\left(\vec{j}\,;\overrightarrow{OB}\right)=\left(\vec{j}\,;\vec{i}\right)+\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OB}\right)=\frac{-\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$, et comme $OB = 4\sqrt{2}$, les coordonnées polaires de *B* dans le repère $\left(O,\vec{j},-\vec{i}\right)$ sont $\left(4\sqrt{2}\,;\frac{\pi}{12}\right)$.
>
> On en déduit, comme dans la question précédente, que :
>
> $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\sqrt{3}+2}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.