Devoir de Mathématiques

Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\frac{2n+1}{3}$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2 et u_3. Quelle conjecture peut-on faire sur la nature de cette suite ?

> $u_0=\frac{2\times 0+1}{3}=\frac{1}{3}$, $u_1=\frac{2\times 1+1}{3}=1$, $u_2=\frac{2\times 2+1}{3}=\frac{5}{3}$, $u_3=\frac{2\times 3+1}{3}=\frac{7}{3}$.
>
> On a $u_1 - u_0 = u_2 - u_1 = u_3 - u_2 = \frac{2}{3}$. La suite (u_n) commence comme une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmétique.

> $u_{n+1}-u_n=\frac{2(n+1)+1}{3}-\frac{2n+1}{3}=\frac{2n+3-(2n+1)}{3}=\frac{2}{3}$. La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison $\frac{2}{3}$.

c) Calculer $S_{10} = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_{10}$.

> On sait que si (u_n) est une suite arithmétique, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = (n+1)\frac{u_0+u_n}{2}$.
>
> On a donc $S_{10} = 11\times\frac{u_0+u_{10}}{2}$. Or $u_0 = \frac{1}{3}$ et $u_{10} = \frac{2\times 10+1}{3}=7$. On a donc :
>
> $S_{10}=11\times\frac{\frac{1}{3}+7}{2}=11\times\frac{\frac{22}{3}}{2}=\frac{121}{3}$.

Exercice 2

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison positive telle que $v_{10} = 384$ et $v_{14} = 6144$.

a) Déterminer la raison q de cette suite et son premier terme v_0.

> Comme (v_n) est une suite géométrique, $v_{14} = v_{10} \times q^4$, donc $q^4 = \frac{6144}{384} = 16$. Comme q est positif, on en déduit que $q = 2$.
>
> On sait que $v_{10} = v_0 \times q^{10}$, donc $v_0 = \frac{384}{2^{10}}=\frac{384}{1024}=\frac{3}{8}$.

b) Calculer $S_7 = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_7$.

> On sait que si (u_n) est une suite géométrique, $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n = u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$.
>
> On a donc $S_7 = \frac{3}{8}\left(\frac{1-2^8}{1-2}\right)=\frac{3\times(-255)}{8\times(-1)}=\frac{765}{8}$.

Exercice 3

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = \frac{1}{2}$ et $w_{n+1} = w_n(1 - w_n)$.

a) Calculer w_1, w_2 et w_3.

> $w_1 = w_0(1 - w_0) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$;
>
> $w_2 = w_1(1 - w_1) = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{16}$;
>
> $w_3 = w_2(1 - w_2) = \frac{3}{16}\left(1-\frac{3}{16}\right)=\frac{39}{256}$.

b) S'agit-il d'une suite arithmétique ou d'une suite géométrique ?

> Comme $w_2 - w_1 \neq w_1 - w_0$, la suite (w_n) n'est pas une suite arithmétique.
>
> Comme $\frac{w_2}{w_1}\neq\frac{w_1}{w_0}$, la suite (w_n) n'est pas une suite géométrique.

c) Quelle conjecture peut-on faire sur le sens de variation de cette suite ?
Démontrer cette conjecture.

> On remarque que $w_0 > w_1 > w_2 > w_3$. La suite (w_n) semble être décroissante.
>
> Pour le démontrer, étudions le signe de $w_{n+1} - w_n$.
>
> $w_{n+1} - w_n = w_n(1 - w_n) - w_n = w_n - w_n^2 - w_n = - w_n^2$. Comme un carré est toujours positif, $- w_n^2$ est négatif, donc $w_{n+1} - w_n$ est négatif et la suite (w_n) est bien décroissante.

Exercice 4

On considère la suite (x_n) des entiers naturels dont le dernier chiffre est égal à 3 : $x_0 = 3$, $x_1 = 13$, $x_2 = 23$, etc...

a) Quelle est la nature de cette suite ? Exprimer x_n en fonction de n.

> On passe d'un terme de (x_n) au suivant en ajoutant 10, il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme 3. On en déduit que $x_n = 3 + 10n$.

b) Calculer la somme de tous les entiers naturels inférieurs à 1000 dont le dernier chiffre est égal à 3.

> Le dernier terme de la somme est $993 = 3 + 99 \times 10 = x_{99}$.
>
> La somme cherchée est donc $x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_{99}$.
>
> Elle est donc égale à $100\left(\frac{3+993}{2}\right)=\frac{100\times 996}{2}=49800$.