

## Devoir de Mathématiques

### Exercice 1

A, B, C et D sont quatre points quelconques du plan.

On appelle G le barycentre du système  $\{ (A; -1); (B; 4); (C; 2); (D; 1) \}$

1- Construire, en justifiant, le barycentre I de  $\{ (A; -1); (B; 4) \}$ .

Pour tout point M,  $-\vec{MA} + 4\vec{MB} = 3\vec{MI}$ . En choisissant  $M = A$ , on obtient  $4\vec{AB} = 3\vec{AI}$ ,  
d'où  $\vec{AI} = \frac{4}{3}\vec{AB}$ .

2- Construire, en justifiant, le barycentre J de  $\{ (C; 2); (D; 1) \}$ .

Pour tout point M,  $2\vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MJ}$ . En choisissant  $M = C$ , on obtient  $\vec{CD} = 3\vec{CJ}$ ,  
d'où  $\vec{CJ} = \frac{1}{3}\vec{CD}$ .

3- En déduire, à l'aide des points I et J, la position du point G, puis le construire.

Comme G est le barycentre de (A; -1), (B; 4), (C; 2) et (D; 1),

comme I est le barycentre de (A; -1) et (B; 4) et comme J est le barycentre (C; 2) et (D; 1),  
par associativité du barycentre, G est le barycentre de (I; 3) et (J; 3).

On en déduit que G est le milieu de [IJ].

4- Démontrer que l'ensemble  $\Delta$  des points M du plan tels que  $\|-\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = \|2\vec{MC} + \vec{MD}\|$  est une droite que l'on précisera.

Nous avons vu que pour tout point M,  $-\vec{MA} + 4\vec{MB} = 3\vec{MI}$  et  $2\vec{MC} + \vec{MD} = 3\vec{MJ}$ .

Alors  $\|-\vec{MA} + 4\vec{MB}\| = \|2\vec{MC} + \vec{MD}\|$  est équivalent à  $\|3\vec{MI}\| = \|3\vec{MJ}\|$ , soit encore  
 $3MI = 3MJ$  et donc  $MI = MJ$ . L'ensemble  $\Delta$  cherché est donc formé par l'ensemble des  
points équidistants de I et J, c'est la médiatrice de [IJ].

### Exercice 2

Le plan est muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On considère les points A(2; -3), B(-2; 1) et C(3; 4).

1- Calculer AB, AC et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . En déduire  $\cos \widehat{BAC}$ , puis une valeur approchée de  $\widehat{BAC}$ .

On a  $\vec{AB}(-4; 4)$  et  $\vec{AC}(1; 7)$ . On en déduit que  $AB = \sqrt{32}$ ,  $AC = \sqrt{50}$  et  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 24$ .

Comme  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$ , on a  $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{24}{\sqrt{32} \cdot \sqrt{50}} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$ .

La calculatrice nous donne alors  $\widehat{BAC} \approx 53^\circ$ .

2- Soit H le pied de la hauteur issue de C. Montrer que  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ .

En déduire le réel k tel que  $\vec{AH} = k\vec{AB}$ .

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AH} + \vec{HC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{AB} \cdot \vec{HC}$ . Comme  $\vec{AB}$  et  $\vec{CH}$  sont orthogonaux, on a  
bien  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}$ .

Si  $\vec{AH} = k\vec{AB}$ , on a  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH} = \vec{AB} \cdot k\vec{AB} = kAB^2$ , d'où  $k = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB^2} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ .

3- Calculer AH, puis CH et l'aire de ABC.

Comme  $\vec{AH} = k\vec{AB}$ ,  $AH = |k|AB = \frac{3}{4} \times \sqrt{32} = \frac{3 \times 4 \sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{2}$ . Avec AHC rectangle en H

on a  $CH^2 = AC^2 - AH^2 = 50 - 18 = 32$ , d'où  $CH = \sqrt{32}$ .

L'aire de ABC est donc  $\frac{AB \times CH}{2} = \frac{32}{2} = 16$ .

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2}{2x-4}$ .

On appelle  $C$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

$f$  est définie lorsque  $2x - 4$  n'est pas nul donc sur  $\mathbb{R} - \{2\}$  ou  $]-\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$ .

2- Calculer les limites de  $f$  aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire l'existence d'éventuelles asymptotes horizontales ou verticales.

Pour le calcul des limites en  $+\infty$  et en  $-\infty$ , commençons par remarquer que :

$$f(x) = \frac{x^2}{2x-4} = \frac{x^2}{x(2 - \frac{4}{x})} = \frac{x}{2 - \frac{4}{x}}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{4}{x} = 2$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . De même  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$  et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} 2x-4 = 0^+$ , on a  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ . De même  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ .

Ces deux résultats nous indiquent que la droite d'équation  $x = 2$  est une asymptote verticale à la courbe  $C$ .

3- Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe.

$f(x)$  est de la forme  $\frac{u}{v}$  avec  $u = x^2$  et  $v = 2x - 4$ , donc  $u' = 2x$  et  $v' = 2$ . Sa dérivée est donnée

par  $\frac{u'v - v'u}{v^2}$ . On a donc  $f'(x) = \frac{2x(2x-4) - 2x^2}{(2x-4)^2} = \frac{4x^2 - 8x - 2x^2}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x}{(2x-4)^2}$ .

Comme  $(2x - 4)^2$  est toujours positif,  $f'(x)$  a le même signe que  $2x^2 - 8x$  qui est un trinôme du second degré qui s'annule pour  $x = 0$  et  $x = 4$ .  $f'(x)$  est donc négatif entre 0 et 4 et positif ailleurs.

4- Construire le tableau de variation de  $f$ .

Sachant que  $f(0) = 0$  et  $f(4) = 4$ , on a le tableau de variation suivant :

$x$	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	4	$+\infty$

5- Soit  $D$  la droite d'équation  $y = \frac{x}{2} + 1$ . Montrer que  $D$  est une asymptote pour la courbe  $C$ , puis étudier la position relative de  $D$  et  $C$ .

On calcule  $f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x^2}{2x-4} - \frac{x}{2} - 1 = \frac{x^2 - x(x-2) - (2x-4)}{2x-4} = \frac{4}{2x-4}$ .

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x-4 = +\infty$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 0$ . De même on trouve que

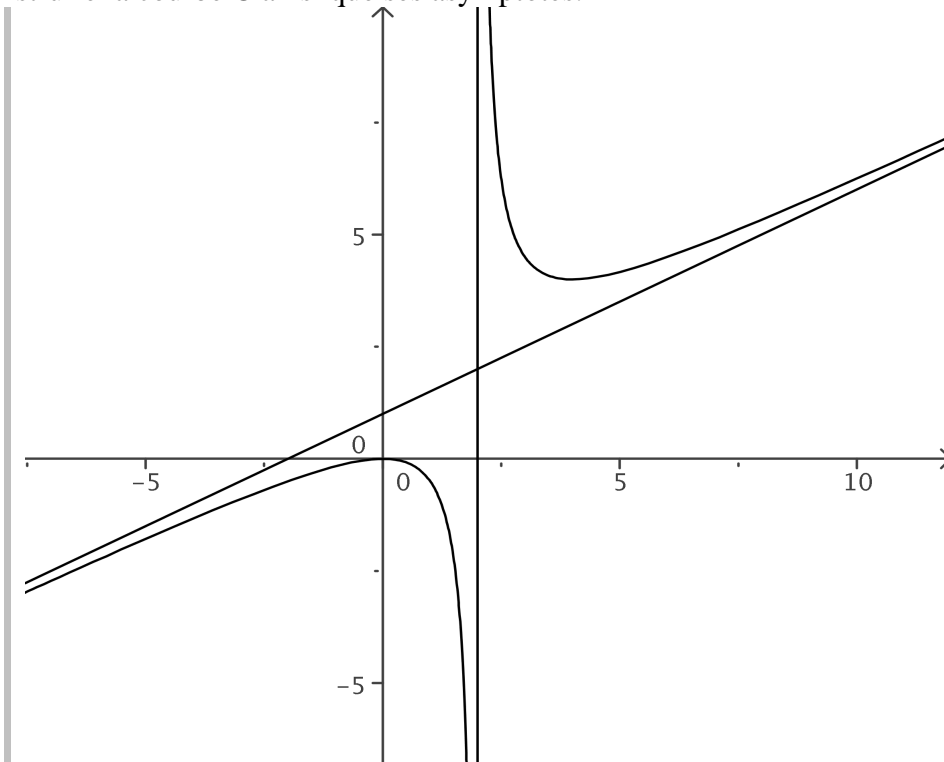
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) = 0$ . Cela nous montre que la droite  $D$  d'équation  $y = \frac{x}{2} + 1$  est une asymptote à la courbe  $C$ .

Le signe de  $f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right)$  est le signe de  $2x - 4$ . Donc :

- si  $x < 2$ ,  $f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) < 0$ , d'où  $f(x) < \left(\frac{x}{2} + 1\right)$  et  $C$  est en dessous de  $D$ .

- si  $x > 2$ ,  $f(x) - \left(\frac{x}{2} + 1\right) > 0$ , d'où  $f(x) > \left(\frac{x}{2} + 1\right)$  et  $C$  est au dessus de  $D$ .

6- Construire la courbe  $C$  ainsi que ses asymptotes.



7- Déterminer le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$  selon les valeurs de  $m$ , d'abord graphiquement, puis algébriquement.

Pour déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = m$  on compte le nombre de points d'intersection entre la courbe  $C$  et la droite d'équation  $y = m$ . Le graphique nous montre que :

si  $m < 0$  ou si  $m > 4$ , l'équation a 2 solutions; si  $0 < m < 4$ , l'équation n'a pas de solution;

si  $m = 0$  ou  $m = 4$ , l'équation a une solution unique.

Résolution algébrique : l'équation  $f(x) = m$  est équivalente à  $\frac{x^2}{2x-4} = m$ , soit, avec  $x \neq 2$ ,

$x^2 = m(2x - 4)$ , soit enfin,  $x^2 - 2mx + 4m = 0$ . Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est  $\Delta = (-2m)^2 - 4 \times 1 \times 4m = 4m^2 - 16m = 4m(m - 4)$ .

- si  $m < 0$  ou si  $m > 4$ , le discriminant  $\Delta$  est positif, l'équation a 2 solutions.
- si  $0 < m < 4$ , le discriminant  $\Delta$  est négatif, l'équation n'a pas de solution.
- si  $m = 0$  ou  $m = 4$ , le discriminant  $\Delta$  est nul, l'équation a une solution unique.