

Devoir de Mathématiques

Exercice 1

1. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On appelle C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Expliquer pourquoi f n'est pas dérivable en 0.

b) Etudier les variations de f .

c) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 4.

d) Tracer la courbe C sur l'intervalle $[0; 10]$ ainsi que sa tangente T .

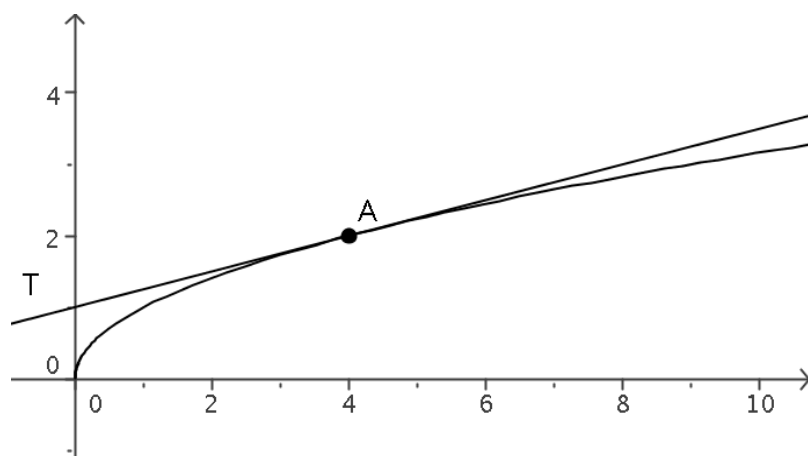
a) La dérivée de \sqrt{x} est $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \neq 0$. On voit bien pourquoi cette formule n'est pas valable lorsque $x = 0$ (on ne peut pas diviser par 0). Pour étudier la dérivabilité en 0 il faut donc revenir à la définition du nombre dérivé et chercher $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h}$.

Or $\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$. Lorsque h tend vers 0, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand et dépasse tout nombre donné, $\frac{1}{\sqrt{h}}$ n'a pas de limite finie et la fonction \sqrt{x} n'est donc pas dérivable en 0. On peut cependant que sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0.

b) Pour $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $]0; +\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) > f(0)$ pour tout x positif. Ainsi f est aussi croissante sur $[0; +\infty[$.

c) On a $f(4) = \sqrt{4} = 2$ et $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. L'équation de la tangente T au point d'abscisse 4 est donc $y = \frac{1}{4}(x - 4) + 2$, soit $y = \frac{1}{4}x + 1$.

d)



2. Le graphique précédent montre que la courbe C se trouve en dessous de la droite T . On se propose de démontrer de deux façons cette constatation.

a) Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{4}x - 1$. Etudier les variations de g , en déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout x de $[0; +\infty[$, puis que C est en dessous de T .

Pour $x > 0$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4} = \frac{2-\sqrt{x}}{4\sqrt{x}}$. Comme $4\sqrt{x}$ est toujours positif, $g'(x)$ a le même signe que $2-\sqrt{x}$, c'est à dire positif pour $x \leq 4$ et négatif pour $x \geq 4$.

On obtient le tableau de variation suivant :

x	0	4	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$		↗	↘

La fonction g a un maximum pour $x = 4$. Comme $g(4) = \sqrt{4} - \frac{1}{4} \times 4 - 1 = 0$, on a donc

$g(x) \leq 0$ pour tout x . On en déduit que $\sqrt{x} - \frac{1}{4}x - 1 \leq 0$, soit $\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$. La courbe C

d'équation $y = \sqrt{x}$ est donc en dessous de la droite T d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

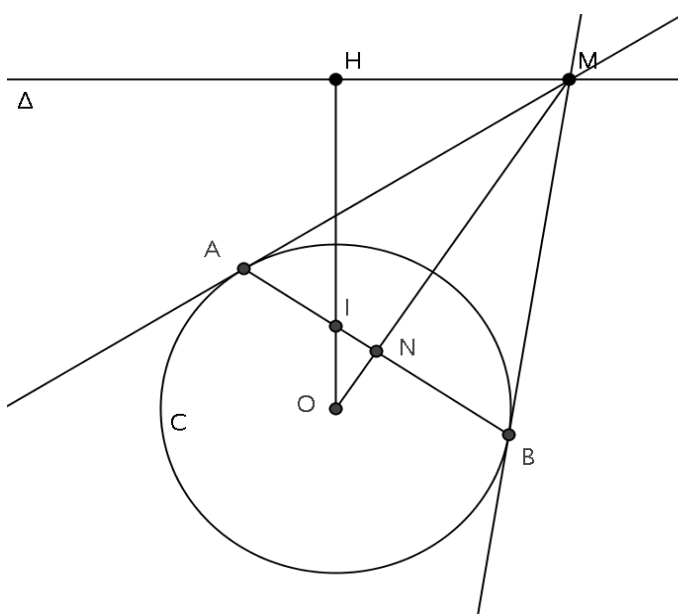
b) Développer $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^2$. Utiliser le résultat obtenu pour montrer que C est en dessous de T.

$\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^2 = \frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1$. Comme un carré est toujours positif, $\frac{x}{4} - \sqrt{x} + 1 \geq 0$, donc

$\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$. On retrouve bien que la courbe C d'équation $y = \sqrt{x}$ est en dessous de la

droite T d'équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

Exercice 2



On considère :

- un segment [OH] de longueur 6.
- le cercle C de centre O et de rayon 3.
- la droite Δ perpendiculaire à (OH) passant par H.
- M un point mobile sur la droite Δ .

Par le point M on peut mener deux tangentes au cercle C en A et B et [AB] coupe [OM] en N et [OH] en I.

1. a) Montrer que A et B sont les points d'intersection du cercle C avec le cercle de diamètre [OM].

b) Construire la figure avec un logiciel de géométrie comme Geogebra. Déplacer le point M sur la droite Δ en faisant apparaître la trace du point N. Que constate-t-on pour le point I et la trace de N ?

a) Comme A et B sont sur le cercle C de diamètre [OM], les triangles OAM et OBM sont rectangles en A et B. On a ainsi $(OA) \perp (AM)$ et $(OB) \perp (BM)$ ce qui montre que (AM) et (BM) sont bien des tangentes au cercle.

b) On constate en déplaçant le point M sur la droite Δ que I reste fixe et que le point N se déplace sur le cercle de diamètre [OI].

2. On se propose de démontrer les constatations précédentes.

a) Démontrer que $\vec{OI} \cdot \vec{OH} = \vec{OM} \cdot \vec{OI} = \vec{OM} \cdot \vec{ON} = \vec{OM} \cdot \vec{OB} = OB^2 = 9$.

Comme H est la projection orthogonale de M sur (OI), $\vec{OM} \cdot \vec{OI} = \vec{OH} \cdot \vec{OI}$.

Comme N est la projection orthogonale de I sur (OM), $\vec{OM} \cdot \vec{OI} = \vec{OM} \cdot \vec{ON}$.

Comme N est la projection orthogonale de B sur (OM), $\vec{OM} \cdot \vec{OB} = \vec{OM} \cdot \vec{ON}$.

Comme B est la projection orthogonale de M sur (OB), $\vec{OM} \cdot \vec{OB} = \vec{OB} \cdot \vec{OB} = OB^2$.

Comme $OB = 3$, on a bien $\vec{OI} \cdot \vec{OH} = \vec{OM} \cdot \vec{OI} = \vec{OM} \cdot \vec{ON} = \vec{OM} \cdot \vec{OB} = OB^2 = 9$

b) En déduire que :

- I est un point fixe du segment [OH]
- I est toujours à l'intérieur du cercle C.
- N est sur le cercle de diamètre [OI].

On a $\vec{OI} \cdot \vec{OH} = 9$ et comme O, I et H sont alignés dans cet ordre, $\vec{OI} \cdot \vec{OH} = OI \cdot OH$. Ainsi

$OI \cdot OH = 9$. Mais $OH = 6$, donc $OI = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$. Le point I est fixe sur [OH].

Comme $OI = \frac{3}{2}$, OI est inférieur au rayon de C, donc I est à l'intérieur de C.

Comme ONI est rectangle en N, le cercle de diamètre [OI] passe par N.