Devoir de Mathématiques

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note C la courbe représentative de la fonction *f* définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ et F le point de coordonnées (0,1). Une droite *d* de coefficient directeur *m* passe par F et coupe la courbe C en M_1 et M_2. Les tangentes à C en M_1 et M_2 se coupent au point I.
On se propose d'étudier le lieu géométrique du point I lorsque la droite d pivote autour de F.

Partie 1 : utilisation de Geogebra

Construction de la figure

1- La courbe C et le point F
Pour dessiner la courbe C, inscrire dans la ligne d'édition : `C:y=x^2/4`
Pour dessiner le point F, inscrire : `F=(0,1)`
2- La droite *d*
Pour construire la droite, on commence par créer un cercle de centre F et de rayon 5, puis on place un point M lié à ce cercle, et enfin on appelle *d* la droite (FM).
Pour le cercle, inscrire : `C1=cercle[F,5]`
Pour le point M, après avoir cliqué sur l'icône de création d'un point, cliquer sur un point du cercle C1 et renommer le point M. Vérifier que M est bien lié au cercle.
Remarque : on peut aussi inscrire : `M=point[C1]`
Pour la droite *d*, inscrire : `d=droite[F,M]`
Le coefficient directeur de la droite *d* est $m = \frac{y_M - y_F}{x_M - x_F}$. On peut le faire apparaître en inscrivant :
`m=(y(M)-y(F))/(x(M)-x(F))`
3- Les points M_1 et M_2
Pour construire les points M_1 et M_2 il suffit de cliquer sur l'icône de création de points, puis de cliquer sur les points d'intersection de la courbe C et de la droite *d*. On renomme ensuite les points créés, M1 et M2.
4- Les tangentes et le point I
Pour construire les tangentes à la courbe en M1 et M2, inscrire : `T1=tangente[M1,C]`, puis `T2=tangente[M2,C]`. On pourra changer la couleur de ces deux droites.
On termine en nommant I le point d'intersection de T1 et T2. Dans les propriétés du point I, on indique que ce point doit laisser une trace.

Exploitation de la figure

Pour faire pivoter la droite d autour de F, il suffit de déplacer le point M sur la cercle C1.
Quelle conjecture peut-on faire sur le lieu géométrique du point I ?
Il existe des positions du point M pour lesquelles le point I n'est pas défini. Lesquelles ? Pourquoi ?

Partie 2 : démonstration

1- a) Vérifier que *d* a pour équation $y = mx + 1$.
b) On appelle x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2 (s'ils existent). Vérifier que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - 4mx - 4 = 0$.
Prouver que, quel que soit le réel *m*, cette équation a toujours deux solutions distinctes.
2- a) Trouver, en fonction de x_1, une équation de la tangente en M_1 à C, puis en fonction de x_2, une équation de la tangente en M_2 à C.
b) En déduire que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{x_1 x_2}{4}\right)$. En calculant x_1 et x_2, vérifier que I se trouve toujours sur la droite d'équation $y = -1$.
c) Réciproquement, si on choisit un point I quelconque de la droite d'équation $y = -1$, existe-t-il une valeur de *m* qui permet de l'obtenir ?