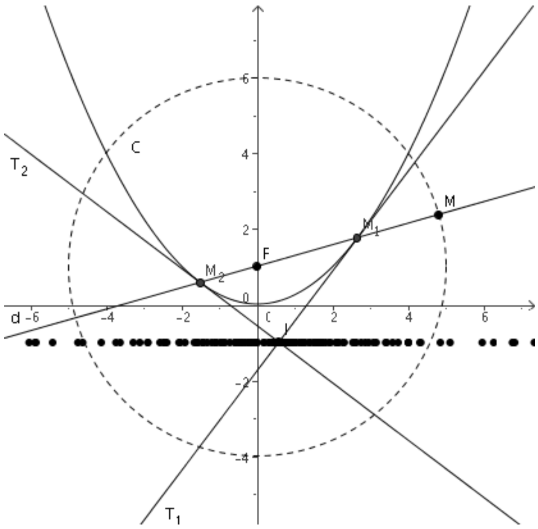
Devoir de Mathématiques

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note C la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ et F le point de coordonnées (0,1). Une droite d de coefficient directeur m passe par F et coupe la courbe C en M_1 et M_2. Les tangentes à C en M_1 et M_2 se coupent au point I.
On se propose d'étudier le lieu géométrique du point I lorsque la droite d pivote autour de F.

Partie 1 : utilisation de Geogebra

Construction de la figure



Exploitation de la figure

Pour faire pivoter la droite d autour de F, il suffit de déplacer le point M sur la cercle C1.
Quelle conjecture peut-on faire sur le lieu géométrique du point I ?

> I se déplace sur la droite d'équation y = – 1.

Il existe des positions du point M pour lesquelles le point I n'est pas défini. Lesquelles ? Pourquoi ?

> Le point I n'existe pas lorsque M se trouve sur l'axe des ordonnées. La droite d n'a qu'un point d'intersection avec la parabole, on ne peut donc pas construire les deux tangentes T_1 et T_2.

Partie 2 : démonstration

1- a) Vérifier que d a pour équation $y = mx + 1$.

> Le coefficient directeur de la droite d est m. Comme d passe par F(0; 1), son ordonnée à l'origine est 1. d admet donc comme équation $y = mx + 1$.

b) On appelle x_1 et x_2 les abscisses des points M_1 et M_2 (s'ils existent). Vérifier que x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 - 4mx - 4 = 0$.
Prouver que, quel que soit le réel m, cette équation a toujours deux solutions distinctes.

> Les abscisses des points d'intersection de la droite d et de la courbe C vérifient l'équation :
>
> $\frac{x^2}{4} = mx + 1$ qui est équivalente à $x^2 - 4mx - 4 = 0$.
>
> Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 16m^2 + 16$. Comme Δ est toujours positif (somme de 2 nombres positifs), l'équation a toujours deux solutions x_1 et x_2.

2- a) Trouver, en fonction de x_1, une équation de la tangente en M_1 à C, puis en fonction de x_2, une équation de la tangente en M_2 à C.

L'équation de la tangente en a à la courbe représentative d'une fonction dérivable f est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Ici, $f(x) = \frac{x^2}{4}$ et $f'(x) = \frac{x}{2}$. Cette équation est donc $y = \frac{a}{2}(x-a)+\frac{a^2}{4}$.

L'équation réduite de T_1 est donc $y = \frac{x_1}{2}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4}$, celle de T_2 est $y = \frac{x_2}{2}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$.

b) En déduire que le point I a pour coordonnées $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x_1x_2}{4}\right)$. En calculant x_1 et x_2, vérifier que I se trouve toujours sur la droite d'équation $y = -1$.

L'abscisse de I est solution de l'équation $\frac{x_1}{2}(x-x_1)+\frac{x_1^2}{4} = \frac{x_2}{2}(x-x_2)+\frac{x_2^2}{4}$.

Soit $\frac{x_1x}{2}-\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_2x}{2}-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_2^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x_1x}{2}-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_2x}{2}-\frac{x_2^2}{4} \Leftrightarrow \frac{x(x_1-x_2)}{2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{x(x_1-x_2)}{2}=\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\frac{x_1+x_2}{4} \Leftrightarrow x=\frac{x_1+x_2}{2}$.

Comme I est sur T_1, son ordonnée est $y = \frac{x_1}{2}(\frac{x_1+x_2}{2}-x_1)+\frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1^2}{4}+\frac{x_1x_2}{4}-\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_1^2}{4}$,

soit $y = \frac{x_1x_2}{4}$. Les coordonnées de I sont bien $\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{x_1x_2}{4}\right)$.

Comme x_1 et x_2 sont solutions de $x^2 - 4mx - 4 = 0$, on a :

$x_1 = \frac{4m+\sqrt{16m^2+16}}{2}=2m+\sqrt{4m^2+4}$ et $x_2 = \frac{4m-\sqrt{16m^2+16}}{2}=2m-\sqrt{4m^2+4}$.

Alors $x_1x_2 = (2m+\sqrt{4m^2+4})(2m-\sqrt{4m^2+4}) = 4m^2 - (4m^2 + 4) = -4$,

d'où $\frac{x_1x_2}{4} = -1$. L'ordonnée de I est toujours égale à -1, le point I se trouve donc sur la droite d'équation $y = -1$.

c) Réciproquement, si on choisit un point I quelconque de la droite d'équation $y = -1$, existe-t-il une valeur de m qui permet de l'obtenir ?

Considérons un point de la droite d'équation y = – 1. Appelons t son abscisse. Son ordonnée est égale à 1. Pour que ce point soit atteint par la construction décrite il suffit que le système $\begin{cases}\frac{x_1+x_2}{2}=t\\ \frac{x_1x_2}{4}=-1\end{cases}$ ait une solution. Ce système est équivalent à $\begin{cases}x_1+x_2=2t\\ x_1x_2=-4\end{cases}$. Cela signifie que x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $x^2 - 2tx - 4 = 0$. En prenant $m = \frac{t}{2}$, on est ramené à l'équation $x^2 - 4mx - 4 = 0$. Le point de coordonnées $(t, -1)$ est donc obtenu en partant de la droite d'équation $y=\frac{t}{2}x+1$. Tous les points de la droite d'équation $y = -1$ sont donc atteints.