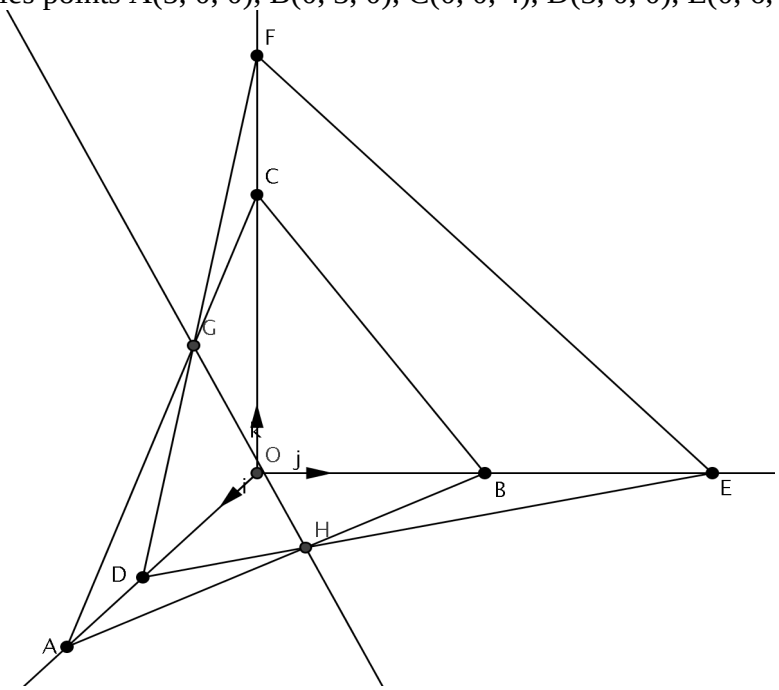
Devoir de Mathématiques

Exercice 1

(*TransMath 1S exercice 83 p 323*)
L'espace est muni d'un repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
1. Placer les points A(5, 0, 0), B(0, 3, 0), C(0, 0, 4), D(3, 0, 0), E(0, 6, 0) et F(0, 0, 6).



2. Trouver graphiquement l'intersection des plans (ABC) et (DEF).

Les droites (AC) et (DF) qui sont dans le plan $(O;\vec{i},\vec{k})$ se coupent en G.

Les droites (AB) et (DE) qui sont dans le plan $(O;\vec{i},\vec{j})$ se coupent en H.

Les points G et H sont donc à la fois dans le plan (ABC) et dans le plan (DEF).
L'intersection de ces deux plans est donc la droite (GH).

3. *d* est la droite commune aux deux plans. Calculer les coordonnées des points d'intersection de la droite *d* avec les plans $(O;\vec{i},\vec{j})$ et $(O;\vec{i},\vec{k})$.

Le point G, intersection de *d* et de $(O;\vec{i},\vec{k})$, est aussi l'intersection de (AC) et (DF).

Il existe donc un réel *k* tel que $\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AC}$ et un réel *k '* tel que $\overrightarrow{DG}=k'\overrightarrow{DF}$.

On en déduit que $\begin{cases} x_G-x_A=k(x_C-x_A) \\ y_G-y_A=k(y_C-y_A) \\ z_G-z_A=k(z_C-z_A) \end{cases}$ et $\begin{cases} x_G-x_D=k'(x_F-x_D) \\ y_G-y_D=k'(y_F-y_D) \\ z_G-z_D=k'(z_F-z_D) \end{cases}$,

ce qui donne $\begin{cases} x_G-5=-5k \\ y_G=0 \\ z_G=4k \end{cases}$ et $\begin{cases} x_G-3=-3k' \\ y_G=0 \\ z_G=6k' \end{cases}$.

k et *k '* sont donc solutions du système $\begin{cases} 5-5k=3-3k' \\ 4k=6k' \end{cases}$.

On en déduit que $k=\frac{2}{3}$ et $k'=\frac{4}{9}$, d'où $x_G=\frac{5}{3}$ et $z_G=\frac{8}{3}$.

Les coordonnées de G sont donc $\left(\frac{5}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$.

De la même façon, on calcule les coordonnées de H.

Le point H, intersection de *d* et de $(O; \vec{i}, \vec{j})$, est aussi l'intersection de (AB) et (DE).

Il existe donc un réel *k* tel que $\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB}$ et un réel *k '* tel que $\overrightarrow{DH} = k'\overrightarrow{DE}$.

On en déduit que $\begin{cases} x_H - x_A = k(x_B - x_A) \\ y_H - y_A = k(y_B - y_A) \\ z_H - z_A = k(z_B - z_A) \end{cases}$ et $\begin{cases} x_H - x_D = k'(x_E - x_D) \\ y_H - y_D = k'(y_E - y_D) \\ z_H - z_D = k'(z_E - z_D) \end{cases}$,

ce qui donne $\begin{cases} x_H - 5 = -5k \\ y_H = 3k \\ z_H = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_H - 3 = -3k' \\ y_H = 6k' \\ z_H = 0 \end{cases}$.

k et *k '* sont donc solutions du système $\begin{cases} 5 - 5k = 3 - 3k' \\ 3k = 6k' \end{cases}$.

On en déduit que $k = \frac{4}{7}$ et $k' = \frac{2}{7}$, d'où $x_H = \frac{15}{7}$ et $y_H = \frac{12}{7}$.

Les coordonnées de H sont donc $\left(\frac{15}{7}, \frac{12}{7}, 0\right)$.

4. Pourquoi les droites *d*, (CB) et (EF) sont-elles concourantes ? Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Comme $x_G \neq x_H$, la droite (GH) n'est pas parallèle au plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$, elle le coupe donc en un point M. Ce point étant sur (GH) est dans le plan (ABC), il est donc sur l'intersection de (ABC) avec $(O; \vec{j}, \vec{k})$, c'est à dire (BC). De même, M étant sur (GH) est dans le plan (DEF), il est donc sur l'intersection de (DEF) avec $(O; \vec{j}, \vec{k})$, c'est à dire (EF). Ainsi le point M se trouve sur les 3 droites (GH), (BC) et (EF).

Le point M est l'intersection de (BC) et (EF).

Il existe donc un réel *k* tel que $\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC}$ et un réel *k '* tel que $\overrightarrow{EM} = k'\overrightarrow{EF}$.

On en déduit que $\begin{cases} x_M - x_B = k(x_C - x_B) \\ y_M - y_B = k(y_C - y_B) \\ z_M - z_B = k(z_C - z_B) \end{cases}$ et $\begin{cases} x_M - x_E = k'(x_F - x_E) \\ y_M - y_E = k'(y_F - y_E) \\ z_M - z_E = k'(z_F - z_E) \end{cases}$,

ce qui donne $\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M - 3 = -3k \\ z_M = 4k \end{cases}$ et $\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M - 6 = -6k' \\ z_M = 6k' \end{cases}$.

k et *k '* sont donc solutions du système $\begin{cases} 3 - 3k = 6 - 6k' \\ 4k = 6k' \end{cases}$.

On en déduit que $k = 3$ et $k' = 2$, d'où $y_M = -6$ et $z_M = 12$.

Les coordonnées de M sont donc (0, – 6, 12).

Exercice 2

(*TransMath 1S exercice 91 p 324*)
L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
c est un nombre réel.
On considère les points A(3, 1, – 3), B(– 1, 5, – 3) et C(– 1, 1, c).
Démontrer que, quel que soit le réel c, le triangle ABC est isocèle.
Peut-il être équilatéral ?

> On a $AC^2 = 4^2 + (c + 3)^2 = c^2 + 6c + 25$ et $BC^2 = (-4)^2 + (c + 3)^2 = c^2 + 6c + 25$.
>
> Comme $AC^2 = BC^2$ et comme AC et BC sont positifs, AC = BC. Le triangle ABC est donc isocèle en C.
>
> Pour que ABC soit équilatéral il faut et il suffit que $AC^2 = AB^2$.
>
> Or $AB^2 = (-4)^2 + 4^2 = 32$. On doit donc avoir $c^2 + 6c + 25 = 32$, soit $c^2 + 6c - 7 = 0$.
>
> Il s'agit d'une équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = 36 + 28 = 64$. Elle a deux solutions qui sont $c_1 = \frac{-6+8}{2} = 1$ et $c_2 = \frac{-6-8}{2} = -7$.
>
> Le triangle ABC est équilatéral lorsque c est égal à 1 ou à – 7.