Devoir de Mathématiques

Exercice 1

(TransMath 1S ex 51 p 166)

(u_n) est la suite numérique définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\frac{1}{2} u_n + 1$.

1- Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5.

> $u_1 = -\frac{1}{2}$; $u_2 = \frac{5}{4}$; $u_3 = \frac{3}{8}$; $u_4 = \frac{13}{16}$; $u_5 = \frac{19}{32}$.

2- Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 3u_n - 2$.
Calculer v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5.

> $v_0 = 7$; $v_1 = -\frac{7}{2}$; $v_2 = \frac{7}{4}$; $v_3 = -\frac{7}{8}$; $v_4 = \frac{7}{16}$; $v_5 = -\frac{7}{32}$.
>
> La suite v_n semble être géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

3- Prouver que la suite v_n est géométrique. Exprimer (u_n) en fonction de n.

> $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3u_{n+1}-2}{3u_n-2} = \frac{-\frac{3}{2}u_n+1}{3u_n-2} = \frac{-\frac{1}{2}(3u_n-2)}{3u_n-2} = -\frac{1}{2}$. La suite v_n est donc géométrique de raison $-\frac{1}{2}$. On en déduit que $v_n = 7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
>
> Comme $v_n = 3u_n - 2$, $u_n = \frac{v_n+2}{3}$, donc $u_n = \frac{1}{3}\left(2+7 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$.

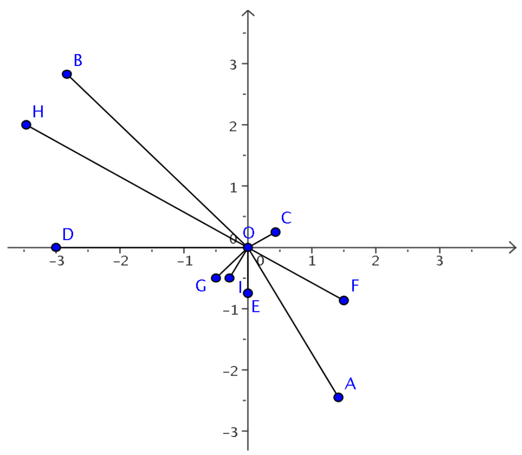
Exercice 2

(TransMath 1S ex 44 p 288)
Chacun des points suivants est défini par ses coordonnées cartésiennes (x, y). Trouvez ses coordonnées polaires (r, θ), θ appartenant à $]-\pi; \pi]$.

1- A($\sqrt{2}$, $-\sqrt{6}$); B($-2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$); C($\frac{\sqrt{3}}{4}$, $\frac{1}{4}$)

2- D(–3, 0); E(0, $-\frac{3}{4}$); F($\frac{3}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

3- G($-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$); H($-2\sqrt{3}$, 2); I($-\frac{1}{2\sqrt{3}}$, $-\frac{1}{2}$)



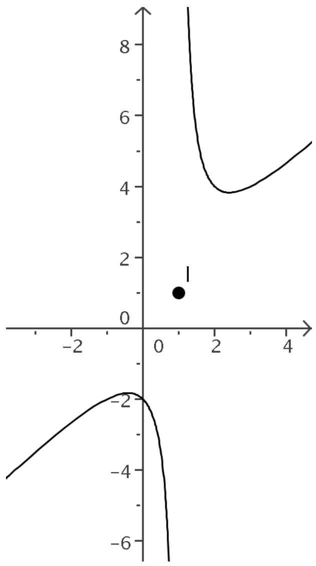
A($2\sqrt{2}$; $-\pi/3$)
B(4; $3\pi/4$)
C(1/2; $\pi/6$)
D(3; π)
E(3/4; $-\pi/2$)
F($\sqrt{3}$; $-\pi/6$)
G($\sqrt{2}/2$; $-3\pi/4$)
H(4; $5\pi/6$)
I ($\sqrt{3}/3$; $-2\pi/3$)

Exercice 3

(TransMath 1S ex 38 p 32)
Paramétrez la fenêtre graphique de votre calculatrice de la façon suivante :
Xmin=-3; Xmax=3; Ymin=-4; Ymax=9.

Faites tracer la courbe C d'équation $y=x+\dfrac{2}{x-1}$.

Conjecturez un centre de symétrie pour C, puis démontrez cette conjecture.



Il semble que le point I(1, 1) soit centre de symétrie.
Calculons $f\,(1 + h)$ et $f\,(1 - h)$ avec $h \neq 0$.

$f\,(1 + h) = 1 + h + \dfrac{2}{h}$ et $f\,(1 - h) = 1 - h - \dfrac{2}{h}$.

Alors $f\,(1 + h) + f\,(1 - h) = 2$ et

$\dfrac{f\,(1+h)+f\,(1-h)}{2} = 1.$

Ceci montre que I est bien centre de symétrie de la courbe.

Exercice 4

(TransMath 1S ex 55 p 33)
On donne les fonctions f_1 et f_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2 + 1$ et $f_2(x) = 2x - 1$, la fonction f_3 définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ et la fonction f_4 définie sur $[0; +\infty[$ par $f_4(x) = \sqrt{x}$.

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

a) $f : x \mapsto 2\sqrt{x}-1$

b) $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

c) $h : x \mapsto \dfrac{1}{2x-1}$

d) $k : x \mapsto \dfrac{2}{x}-1$

a) $f = f_2 \circ f_4$

b) $g = f_4 \circ f_1$

c) $h = f_3 \circ f_2$

d) $k = f_2 \circ f_3$