Devoir de Mathématiques

(Exercice 82 p. 170 TransMath-Nathan)

On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous.

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

Objectif : préciser la position de 2001 dans le tableau

1. Etudions la position de ces nombres pour voir comment il est possible de repérer l'un deux. Les nombres sont écrits en lignes et chaque ligne contient des cases. On peut donc repérer un nombre en disant : il est dans la ligne n et dans la p -ième case de celle-ci en partant de la gauche. Par exemple, 14 est dans la 4ème ligne et dans la 5ème case en partant de 10.

Voyons comment sont disposées les cases par ligne : ligne 1, 1 case; ligne 2, 3 cases; ligne 3, 5 cases; ligne 4, 7 cases. Le nombre de cases par ligne augmente à chaque fois de 2.

Appelons u_n le nombre de cases à la n -ième ligne.

Que pouvez-vous dire de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.

2. Continuons nos observations. Une ligne contient des nombres consécutifs. Donc pour savoir si un nombre est dans la ligne n , il suffit de savoir s'il est compris entre le premier et le dernier nombre de cette ligne. On note respectivement a_n et b_n ces nombres.

a) Justifiez que $a_1 = b_1$, puis que $a_{n+1} = b_n + 1$ ($n \geq 1$). Il suffit donc d'étudier la suite (b_n) .

Or $b_1 = 1$, $b_2 = 4 = b_1 + 3$ car il y a trois cases dans la ligne 2.

b) Prouvez que $b_n = b_{n-1} + u_n$ et déduisez-en que $b_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

c) Démontrez alors que $b_n = n^2$ ($n \geq 1$) et que $a_n = n^2 - 2n + 2$.

d) Trouvez alors la ligne n à laquelle appartient 2001, puis précisez dans quelle case de cette ligne il se trouve .

3. Rédigez une solution.