Devoir de Mathématiques

(Exercice 82 p. 170 TransMath-Nathan)

On suppose que la suite des entiers naturels est écrite dans un tableau selon la disposition ci-dessous.

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

Objectif : préciser la position de 2001 dans le tableau

1. Etudions la position de ces nombres pour voir comment il est possible de repérer l'un deux.
Les nombres sont écrits en lignes et chaque ligne contient des cases. On peut donc repérer un nombre en disant : il est dans la ligne n et dans la p-ième case de celle-ci en partant de la gauche.
Par exemple, 14 est dans la 4ème ligne et dans la 5ème case en partant de 10.
Voyons comment sont disposées les cases par ligne : ligne 1, 1 case; ligne 2, 3 cases; ligne 3, 5 cases; ligne 4, 7 cases. Le nombre de cases par ligne augmente à chaque fois de 2.
Appelons u_n le nombre de cases à la n-ième ligne.
Que pouvez-vous dire de la suite (u_n) ? Préciser ses éléments caractéristiques.

> Comme le nombre de cases par ligne augmente à chaque fois de 2, la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$. Son premier terme est $u_1 = 1$. On en déduit que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $u_n = u_1 + (n-1)r = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

2. Continuons nos observations. Une ligne contient des nombres consécutifs. Donc pour savoir si un nombre est dans la ligne n, il suffit de savoir s'il est compris entre le premier et le dernier nombre de cette ligne. On note respectivement a_n et b_n ces nombres.
a) Justifiez que $a_1 = b_1$, puis que $a_{n+1} = b_n + 1$ ($n \geqslant 1$). Il suffit donc d'étudier la suite (b_n).
Or $b_1 = 1$, $b_2 = 4 = b_1 + 3$ car il y a trois cases dans la ligne 2.

> La ligne 1 ne contient qu'une case, donc $a_1 = b_1 = 1$.
>
> Le dernier nombre de la ligne n est b_n; le nombre suivant, $b_n + 1$ sera donc le premier nombre de la ligne suivante, soit a_{n+1}. On a donc bien $a_{n+1} = b_n + 1$.

b) Prouvez que $b_n = b_{n-1} + u_n$ et déduisez-en que $b_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

> b_{n-1} est le dernier nombre de la ligne $n-1$, en lui ajoutant u_n qui est le nombre de cases de la ligne n (la ligne suivante) on obtient le dernier nombre de la ligne n, soit b_n.
>
> Ainsi, $b_n = b_{n-1} + u_n$.
>
> Idée 1 : pour arriver à b_n, il a fallu remplir la ligne 1, puis la ligne 2, etc... jusqu'à la ligne n, c'est à dire écrire u_1 nombres, puis u_2, etc..., puis u_n nombres. On a donc bien :
>
> $b_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.
>
> Idée 2 : $b_n = b_{n-1} + u_n$ est équivalent à $u_n = b_n - b_{n-1}$.
>
> Ainsi $u_2 = b_2 - b_1$, $u_3 = b_3 - b_2$, ... , $u_n = b_n - b_{n-1}$. En ajoutant toutes ces égalités, on obtient :
>
> $u_2 + u_3 + ... + u_n = b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + ... + b_n - b_{n-1} = b_n - b_1$ car tous les termes se simplifient à part b_n et b_1. Comme $b_1 = u_1 = 1$, on obtient bien $b_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

c) Démontrez alors que $b_n = n^2$ ($n \geqslant 1$) et que $a_n = n^2 - 2n + 2$.

> Comme b_n est la somme des premiers termes de la suite arithmétique u_n, on a :
> $b_n = n\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$. Comme $u_1 = 1$ et $u_n = 2n - 1$, cela donne $b_n = n\left(\frac{2n}{2}\right) = n^2$.
> Nous avons vu que $a_{n+1} = b_n + 1$, donc $a_n = b_{n-1} + 1$. En appliquant le résultat précédent,
> $a_n = (n - 1)^2 + 2 = n^2 - 2n + 2$.

d) Trouvez alors la ligne n à laquelle appartient 2001, puis précisez dans quelle case de cette ligne il se trouve .

> Soit n le numéro de la ligne qui contient le nombre 2001.
> On a $b_{n-1} < 2001 \leqslant b_n$, soit $(n - 1)^2 < 2001 \leqslant n^2$. Comme $\sqrt{2001} \approx 44{,}75$, on a $n = 45$.
> La place de 2001 sur la ligne 45 est donnée par $2001 - b_{44} = 2001 - 44^2 = 65$.
> Conclusion : 2001 sera le 65ème nombre de la 45ème ligne.