

# Dérivée et vitesse

## A. Vitesse

---

On considère un mobile qui se déplace sur un axe ( $x'x$ ). A chaque instant  $t$ , la position du mobile est donnée par son abscisse  $x$  qui est donc une fonction de  $t$ ; on posera  $x = f(t)$ .

Que peut-on dire de la vitesse de ce mobile ?

Nous pouvons trouver facilement sa vitesse moyenne entre deux instants  $t_0$  et  $t_1$  : il s'agit du quotient distance parcourue donc  $f(t_1) - f(t_0)$  sur durée donc  $t_1 - t_0$ ; d'où  $v_m = \frac{f(t_1) - f(t_0)}{t_1 - t_0}$ .

Que devient cette vitesse moyenne lorsque  $t_1$  tend vers  $t_0$  ?

En posant  $t_1 = t_0 + h$ , cela revient à chercher la limite de  $\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$  lorsque  $h$  tend vers

0. Si  $f$  est dérivable en  $t_0$ , cette limite existe et est égale à la dérivée de  $f$  en  $t_0$ , soit  $f'(t_0)$ .

On l'appelle vitesse instantanée à l'instant  $t_0$ .

Conclusion :

Si la position d'un mobile est donnée par une fonction dérivable  $f$ , sa vitesse instantanée est donnée par la fonction  $f'$ .

### Deux cas particuliers

**Mouvement uniforme** : la vitesse est constante égale à  $v_0$ ; la fonction  $f$  qui donne la position du mobile est donc de la forme  $f(t) = v_0 t + C$ . Si à l'instant 0 la position du mobile est  $x_0$ , on trouve que  $f(t) = v_0 t + x_0$ .

**Mouvement uniformément accéléré** : la vitesse instantanée est une fonction affine du temps, on a donc  $v = at + b$ . La fonction  $f$  qui donne la position du mobile est donc de la forme

$$f(t) = \frac{a}{2} t^2 + bt + c.$$

## B. Loi de la chute des corps

---

Lorsqu'on laisse tomber un objet sa vitesse augmente proportionnellement au temps de la chute (voir cours de Physique). Il existe donc un coefficient  $g$  tel que  $v = gt$ . Des mesures physiques indiquent que  $g \approx 9,81$ . On se trouve en présence d'un mouvement uniformément accéléré.

1- Quelle est la fonction qui donne la distance parcourue en considérant que l'objet est lâché à l'instant 0 et qu'il se trouve alors au point d'abscisse 0 ?

2- Si on lâche l'objet d'une hauteur de 20m, quelle sera la durée de sa chute ? Quelle sera sa vitesse au moment où il atteint le sol ?

**Application** : mesurer la profondeur d'un puits avec un chronomètre.

On lâche un objet et on mesure le temps mis avant d'entendre le « plouf ». Sachant que le son se déplace à la vitesse constante de 300m/s et qu'on a entendu le « plouf » après 1,5s, quelle est la profondeur du puits ?