Problèmes de tangentes

A. Interprétation d'un graphique

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=\frac{x^4}{4}+x^3+\frac{x^2}{2}+8$.

1. A l'aide de la calculette, construire la courbe représentative de *f*. En combien de points la courbe semble-t-elle avoir une tangente parallèle à l'axe des abscisses ?
2. Trouvez la valeur exacte des abscisses de ces points par le calcul.

B. Tangente en deux points

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x)=-x^4+2x^2+x$ et *C* sa courbe représentative.

1. Déterminer une équation de la tangente T à *C* en -1 .
2. Sur la calculette, tracer *C* et T. T semble tangente à C en un deuxième point. Le démontrer.

C. Tangente à une hyperbole

Soit *H* l'hyperbole d'équation $y=\frac{1}{x}$.

1. Déterminer les coordonnées du point A de *H* d'abscisse $\frac{2}{3}$, puis une équation de la tangente T à *H* en ce point.
2. Déterminer les coordonnées des points B et C intersections de T avec les axes de coordonnées. Vérifier que A est le milieu de [BC].
3. Généralisation : reprendre les questions précédentes avec le point A d'abscisse *m*.
4. En déduire une méthode géométrique de la construction des tangentes à *H*.

D. Tangente à une parabole

Soit *P* la parabole d'équation $y=x^2$.

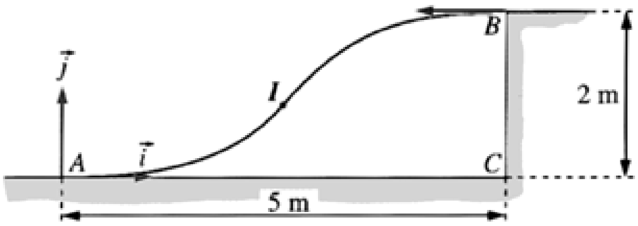
1. Soit *D* une droite d'équation $y=ax+b$. A quelle condition sur *a* et *b*, la droite D a-t-elle des points communs avec *P* ?
2. Dans le cas où *D* et *P* n'ont qu'un seul point commun, montrer que *D* est une tangente à *P*.
3. Dans le cas où *D* coupe *P* en deux points d'abscisses M_1 et M_2 d'abscisses x_1 et x_2, montrer que la tangente à P au point d'abscisse $\frac{x_1+x_2}{2}$ est parallèle à (M_1M_2).

E. Raccordement de courbes

Pour faire franchir à des chariots une marche de deux mètres de haut, sur une distance horizontale de cinq mètres, on cherche à construire un toboggan.

La courbe $\mathcal{C}$, qui est une vue en coupe du toboggan, doit obéir aux contraintes suivantes :

- la courbe contient les points A, B et le milieu I de $[AB]$;
- la fonction définissant la courbe dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ est dérivable ;
- les demi-tangentes en A et B sont horizontales (pour se raccorder sans « angle » avec le plan du sol).



I. Recherche de fonctions polynômes du second degré

On cherche deux arcs AI et IB de deux paraboles se raccordant en I.

1. Montrer qu'il existe une unique fonction polynôme du second degré : f : $x \mapsto ax^2 + bx + c$, répondant aux conditions précédentes, telle que l'arc AI soit un arc de la parabole représentant f.

2. De même, montrer qu'il existe une unique fonction polynôme du second degré g, répondant aux conditions précédentes, telle que l'arc IB soit un arc de la parabole représentant g.

On considère la courbe $\mathcal{C}$ qui est la réunion des deux arcs de paraboles AI et IB.

3. Démontrer que la demi-tangente à gauche et la demi-tangente à droite en I sont contenues dans la même droite. La courbe $\mathcal{C}$ convient-elle ?

II. Recherche d'une fonction polynôme du troisième degré

Démontrer qu'il existe une unique fonction polynôme du troisième degré :

f : $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$, répondant aux conditions précédentes.

III. Recherche de la pente maximale

La pente en un point de la courbe est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Dans le cas **I.** de la réunion de deux arcs de paraboles, déterminer la pente maximale.

2. Dans le cas **II.** de la courbe du troisième degré, déterminer la pente maximale.

3. On veut, de plus, que l'angle aigu de la tangente avec la droite horizontale (AC) n'excède pas 35°. Les deux courbes précédentes conviennent-elles ?

D'après Mathématiques Première S analyse, *collection Déclic. Éd. Hachette.*