Dérivation

A. Nombre dérivé

1- Limite finie d'une fonction en 0.

Soit f une fonction définie sur D tel que 0 est à l'intérieur de D ou est une borne de D.
On dit que f a pour limite le nombre l lorsque x tend vers 0 et on écrit $\lim_{x\to 0} f(x)=l$ si les nombres $f(x)$ peuvent devenir aussi proches de l qu'on le désire pour x suffisamment proche de 0.

Exemple :
$\lim_{x\to 0} 5+2x=5$ en effet pour que 5 + 2x soit compris entre 5 – e et 5 + e, c'est à dire 5 – e < 5 + 2x < 5 + e, il suffit de choisir x entre – e/2 et e/2.

2- Fonction dérivable en un point

Soit f une fonction et a un point de son ensemble de définition.
Dire que la fonction f est dérivable en a signifie que la fonction qui à h associe $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0.

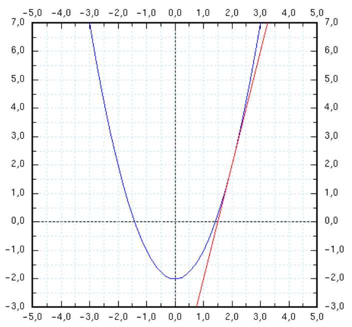
Cette limite est le nombre dérivé de f en a, on la note $f\,'(a)$. $f\,'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - 2$. Montrons que f est dérivable en 2 et calculons $f'(2)$.
$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{(2+h)^2-2\ -2}{h}=\frac{4\text{h}+h^2}{h}=4\ +h$ et $\lim_{h\to 0} 4+h=4$.
On en déduit que f est dérivable en 2 et que $f\,'(2) = 4$.

3- Interprétation graphique du nombre dérivé

Soit f une fonction dérivable en a . On appelle C la représentation graphique de f dans un repère. La courbe C admet une tangente au point d'abscisse a et $f\,'(a)$ est le coefficient directeur de cette tangente.
Une équation de la tangente au point d'abscisse a est $y = f\,'(a)(x – a)+ f\,(a)$.

Exemple



Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 – 2$.
Cette fonction est dérivable en 2 et $f\,'(2) = 4$.
L'équation de la tangente en 2 est $y = f\,'(2)(x – 2) + f(2)$
soit $y = 4(x – 2) + 2$
soit $y = 4x – 6$.
La fonction $x\to 4\text{x}-6$ est une approximation affine de la fonction $x\to x^2-2$ au voisinage de 2.
Pour x proche de 2, $4x – 6$ et $x^2 – 2$ donnent des résultats très voisins.

B. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Soit f une fonction dérivable sur D.
La fonction qui à x associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x, est appelée fonction dérivée de f sur D et on la note f'.

Le tableau suivant donne les fonctions dérivées des fonctions usuelles.

Fonction constante	$\mathbb{R}$	k	0
Fonction affine	$\mathbb{R}$	$ax+b$	a
Carré	$\mathbb{R}$	x^2	$2x$
Cube	$\mathbb{R}$	x^3	$3x^2$
Puissance de x	$\mathbb{R}$	x^n $(n > 0)$	$n\,x^{n-1}$
Fonction inverse	$\mathbb{R}^+$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
Fonction racine carrée	$\mathbb{R}^{+*}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

C. Opérations sur les fonctions dérivables

1- Somme et produit par un réel

> Soient u et v deux fonctions dérivables sur D et k un réel.
> La fonction dérivée de $u + v$ est $(u + v)' = u' + v'$.
> La fonction dérivée de ku est $(ku)' = ku'$.

Exemple
Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$.
La dérivée de x^2 est $2x$, donc la dérivée de $2x^2$ est $2 \times 2x = 4x$.
La dérivée de $-3x$ est -3.
La dérivée de 5 est 0.
On en déduit que la dérivée de f est $f'(x) = 4x - 3$.

2- Produit et quotient de deux fonctions

> Soient u et v deux fonctions dérivables sur D.
> La fonction dérivée de uv est $(uv)' = u'v + v'u$.
> Si v ne s'annule pas sur D,
> - la fonction dérivée de $\frac{1}{v}$ est $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$
> - la fonction dérivée de $\frac{u}{v}$ est $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$.
On pose $u(x) = 2x + 1$, d'où $u'(x) = 2$ et $v(x) = x^2 - 3$, d'où $v'(x) = 2x$.

On a alors :
$f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x) = 2(x^2 - 3) + 2x(2x + 1) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.

Remarque : on aurait pu développer $f(x)$; $f(x) = 2x^3 + x^2 - 6x - 3$ d'où $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

3- Dérivée de *u*(*ax* + *b*)

> Soit u une fonction dérivable sur D, a et b deux réels tels que $ax + b \in$ D.
> La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = u(ax + b)$ est $f'(x) = u'(ax + b)\times a$.

Remarque
La fonction f est la composée de la fonction u et de la fonction affine définie par $ax + b$.
Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=\sqrt{2x+3}$.
On pose $u(x) = \sqrt{x}$; on a alors $f(x) = u(2x + 3)$.
Comme $u'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, la dérivée de f est $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x+3}}\times 2 = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$.

D. Dérivée et sens de variation

> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa dérivée.
> Si f' est strictement positive sur I, sauf peut être en quelques points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I.
> Si f' est strictement négative sur I, sauf peut être en quelques points où f' s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.
> Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Exemple
Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x$ sur $\mathbb{R}$.
La dérivée de f est $f'(x) = 2x - 3$.
C'est une fonction affine qui s'annule pour $x = 3/2$.
Sur $]-\infty\ ;\ 3/2]$ f' est négative donc f est décroissante.
Sur $[3/2\ ;\ +\infty[$ f' est positive donc f est croissante.
On résume cette étude dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$3/2$		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-9/4$	↗	

Remarque
La fonction f admet un minimum en $x = 3/2$.
Quel que soit x, $f(x) \leqslant f(3/2)$.
Comme la dérivée s'annule en $x = 3/2$, la tangente à la courbe en ce point est parallèle à l'axe des abscisses.

E. Approximation affine d'une fonction

Soit f une fonction dérivable en x_0.

Soit φ la fonction définie par $\varphi(h)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$.

On a d'une part $\lim_{h\to 0}\varphi(h)=0$, et d'autre part $f(x_0+h)=f(x_0)+h\,f'(x_0)+h\,\varphi(h)$.

Lorsque h est petit, le terme $h\,\varphi(h)$ est « très » petit, on peut le « négliger ».

On a ainsi : $f(x_0+h)\approx f(x_0)+h\,f'(x_0)$ qui donne une approximation affine de f en x_0.

Applications

- pour $f(x)=x^2$ et $x_0=1$, on obtient : $(1+h)^2\approx 1+2h$.
- pour $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et $x_0=1$, on obtient : $\dfrac{1}{1+h}\approx 1-h$.
- pour $f(x)=\sqrt{x}$ et $x_0=1$, on obtient : $\sqrt{1+h}\approx 1+\dfrac{h}{2}$.