Trinômes du second degré

Second degré Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux. Équation du second degré, discriminant. Signe du trinôme.	• Déterminer et utiliser la forme la plus adéquate d'une fonction polynôme de degré deux en vue de la résolution d'un problème : développée, factorisée, canonique.	On fait le lien avec les représentations graphiques étudiées en classe de seconde. ◇ Des activités algorithmiques doivent être réalisées dans ce cadre.

A. Fonctions trinômes du second degré

On appelle fonction trinôme une fonction qui à tout réel x associe $ax^2 + bx + c$, avec a, b et c réels et a non nul.
$ax^2 + bx + c$ est la forme développée du trinôme.

1. Forme canonique

> Tout trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$
>
> avec $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = c - \frac{b^2}{4a}$.

Démonstration
Vérifions :

$$a(x-\alpha)^2+\beta = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a} = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a} = ax^2+bx+\frac{b^2}{4a}+c-\frac{b^2}{4a}$$

$= ax^2+bc+c$

2. Variations

Le tableau de variations d'une fonction trinôme dépend du signe de a.

Si $a > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

Si $a < 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$a(x-\alpha)^2+\beta$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Démonstration
Soit f la fonction trinôme dont la forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$.
On se place dans le cas $a > 0$.

Considérons 2 réels u et v de l'intervalle $]-\infty\ ;\alpha]$ tels que $u < v$.
On a alors $u - \alpha < v - \alpha$, ajouter $-\alpha$ ne change pas l'ordre des nombres.
Comme u et v sont dans l'intervalle $]-\infty\ ;\alpha]$, $u - \alpha$ et $v - \alpha$ sont négatifs, or la fonction carré est décroissante dans $\mathbb{R}^-$, on a donc $(u - \alpha)^2 > (v - \alpha)^2$.
Multiplier par $a > 0$ et ajouter β ne change pas l'ordre des nombres, donc
$a(u - \alpha)^2 + \beta > a(v - \alpha)^2 + \beta$ et $f(u) > f(v)$. f a changé l'ordre de u et v, donc f est décroissante sur $]-\infty\ ;\alpha]$.
On démontre de même que f est croissante sur $[\alpha\ ; +\infty[$.

Remarques
1) Dans tous les cas on a un extremum égal à β pour $x = \alpha$.
Si $a > 0$, il s'agit d'un minimum et si $a < 0$, il s'agit d'un maximum.
2) La courbe représentative d'une fonction trinôme est toujours une parabole.
Si $a > 0$ elle est tournée vers le haut et si $a < 0$, elle est tournée vers le bas.

3. Forme factorisée

Un trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$, est factorisé lorsqu'on l'écrit sous la forme
$a(x - x_1)(x - x_2)$.
Si un trinôme $ax^2 + bx + c$ peut être factorisé, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a au moins une solution car on a $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ pour $x = x_1$ ou $x = x_2$. (x_1 et x_2 sont alors appelées les racines du trinôme)
Cela signifie que si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solutions, alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ ne peut pas être factorisé.

B. Équations du second degré

On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
La forme canonique du trinôme $ax^2 + bx + c$ est $a(x - \alpha)^2 + \beta$.
L'équation proposée est donc équivalente à $a(x - \alpha)^2 + \beta = 0$, soit $a(x - \alpha)^2 = -\beta$ et finalement
$(x-\alpha)^2=\frac{-\beta}{a}$.

On sait que $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=c-\frac{b^2}{4a}$, donc $\frac{-\beta}{a}=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. En posant $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient l'équation : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$. Le nombre Δ est appelé discriminant du trinôme. On peut alors distinguer plusieurs cas :

- si $\Delta < 0$, alors l'équation n'a pas de solution car un carré est toujours positif.
- si $\Delta = 0$, alors l'équation devient $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ et elle a une solution unique $x=\frac{-b}{2a}$.
- si $\Delta > 0$, on a 2 possibilités :
  soit $x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
  soit $x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}=\frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc $x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Théorème 1

> On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$.
> On appelle discriminant de cette équation le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.
> • Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes, $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.
> • Si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
> • Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution réelle.

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont appelées racines du trinôme.

Théorème 2 (factorisation)

> On considère le trinôme $ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
> • Si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines distinctes x_1 et x_2 et admet la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
> • Si $\Delta = 0$, le trinôme a une seule racine x_0 et admet la factorisation $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$. On dit alors que x_0 est une racine double.
> • Si $\Delta < 0$, le trinôme n'a pas de racine et ne peut pas être factorisé.

Exemples

1) Résoudre $x^2 - 5x + 6 = 0$.
On a $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$. Il ya donc deux solutions qui sont :
$x_1 = \dfrac{5-\sqrt{1}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$ et $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{1}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$.
On a la factorisation $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$.

2) Résoudre $4x^2 - 4x + 1= 0$.
On a $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 4 \times 1 = 16 - 16 = 0$. Il a donc une seule solution $x_1 = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

On a la factorisation $4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2$.

3) Résoudre $x^2 + x + 1 = 0$.
On a $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = 1 - 4 = -3$. Il n'y a donc pas de solution réelle. Le trinôme $x^2 + x + 1$ ne peut pas être factorisé.

C. Signe du trinôme

On considère la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et son discriminant Δ.
Le signe du trinôme va dépendre de l'existence d'éventuelles racines.

- Si $\Delta > 0$, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions x_1 et x_2 et $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

On a alors le tableau de signe suivant :

x		x_1		x_2	
$x - x_1$	-	0	+		+
$x - x_2$	-		-	0	+
$a(x-x_1)(x-x_2)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

$ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ entre les racines.

- Si $\Delta = 0$, l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution x_1. On a alors la factorisation $f(x) = a(x - x_1)^2$.
  $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

- Si $\Delta < 0$, l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solutions, le trinôme ne peut pas être factorisé en un produit de facteurs du premier degré.
  $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

En résumé :

> $ax^2 + bx + c$ est toujours du signe de a sauf entre les racines lorsqu'elles existent.

Exemples

1) Étudier le signe de $x^2 - 5x + 6$.
L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a deux solutions $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$. On en déduit le tableau de signes suivant :

x		2		3	
x^2-5x+6	+	0	-	0	+

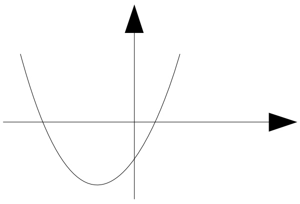
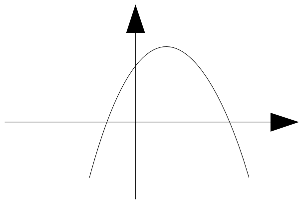
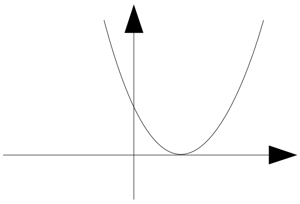
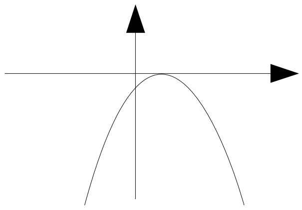
$x^2 - 5x + 6$ est positif sauf si x est entre 2 et 3.

2) Étudier le signe de $4x^2 - 4x + 1$.
L'équation $4x^2 - 4x + 1 = 0$ a une solution unique $x_1 = \frac{1}{2}$. On en déduit que $4x^2 - 4x + 1$ est toujours positif.

3) Étudier le signe de $x^2 + x + 1$
L'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'a pas de solutions, $x^2 + x + 1$ est donc toujours positif.

Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction trinôme est une parabole.
Le signe de a indique le sens de la parabole.
Le signe de Δ indique le nombre de racines, donc le nombre de points d'intersection avec l'axe des abscisses.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta > 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta < 0$