Étude de fonctions

La connaissance des variations de quelques fonctions simples (affines, carré, inverse, racine carrée, valeur absolue) permet d'étudier les variations de fonctions plus complexes.

Étude de fonctions Fonctions de référence $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \lvert x \rvert$.	• Connaître les variations de ces deux fonctions et leur représentation graphique. ▣ Démontrer que la fonction racine carrée est croissante sur $[0\,;+\infty[$. ▣ Justifier les positions relatives des courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x$, $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.	Aucune technicité dans l'utilisation de la valeur absolue n'est attendue.
Sens de variation des fonctions $u+k$, λu, $\sqrt{u}$ et $\frac{1}{u}$, la fonction u étant connue, k étant une fonction constante et λ un réel.	• Exploiter ces propriétés pour déterminer le sens de variation de fonctions simples.	▣ On nourrit la diversité des raisonnements travaillés dans les classes précédentes en montrant à l'aide de contre-exemples qu'on ne peut pas énoncer de règle générale donnant le sens de variation de la somme ou du produit de deux fonctions. L'étude générale de la composée de deux fonctions est hors programme.

A. Rappels utiles

Pour démontrer les propriétés à connaître sur le sens de variation des fonctions nous serons amenés à utiliser quelques définitions et propriétés importantes.

1- Ordre des nombres et opérations

> **Propriété 1** : Quels que soient les nombres réels a et b, $a \leqslant b \Leftrightarrow a - b$ négatif.

Pour étudier l'ordre de 2 nombres, on peut essayer de déterminer le signe de leur différence.
Par exemple, pour comparer $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{10}$ on pourra calculer $\frac{1}{3}-\frac{3}{10}=\frac{10}{30}-\frac{9}{30}=\frac{1}{30}$. Comme $\frac{1}{3}-\frac{3}{10}$ est strictement positif, on peut dire que $\frac{1}{3} > \frac{3}{10}$.

> **Propriété 2** : Quels que soient les nombres réels a, b et c, si $a \leqslant b$, alors $a + c \leqslant b + c$.

Une inégalité étant donnée, on obtient une nouvelle inégalité de même sens en ajoutant un même nombre aux deux membres.

Démonstration

On se donne deux nombres a et b tels que $a \leqslant b$ et on compare $a + c$ et $b + c$. Pour cela on étudie leur différence : $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b$. Comme $a \leqslant b$, $a - b$ est négatif, donc $(a + c) - (b + c)$ est négatif et $a + c \leqslant b + c$.

Propriété 3 : Quels que soient les nombres réels a, b et k :
- si $a \leqslant b$ et si k est positif, alors $ka \leqslant kb$.
- si $a \leqslant b$ et si k est négatif, alors $ka \geqslant kb$.

Une inégalité étant donnée, on obtient une nouvelle inégalité :
- de même sens en multipliant les deux membres par un nombre strictement positif
- de sens contraire en multipliant les deux membres par un nombre strictement négatif

Démonstration

On se donne deux nombres a et b tels que $a \leqslant b$ et on compare ka et kb. Pour cela on étudie leur différence $ka - kb = k(a - b)$. Comme $a \leqslant b$, $a - b$ est négatif ; alors on deux cas possibles :
- si k est positif, $ka - kb$ est négatif, donc $ka \leqslant kb$.
- si k est négatif, $ka - kb$ est positif, donc $ka \geqslant kb$.

Exemple d'application

Résoudre l'inéquation $2x - 5 < 6x + 1$
a) on ajoute $-6x$ dans les deux membres et on obtient $-4x - 5 < 1$
b) on ajoute 5 dans les deux membres et on obtient $-4x < 6$
c) on multiplie les deux membres par $-\frac{1}{4}$ qui est négatif et on obtient $x > -\frac{1}{4} \times 6$, et finalement $x > -\frac{3}{2}$.

Le raisonnement peut être fait dans l'autre sens en multipliant par -4, en ajoutant -5, puis en ajoutant $6x$; on revient alors sur l'inéquation de départ $2x - 5 < 6x + 1$. Cette inéquation est donc équivalente à $x > -\frac{3}{2}$, on en déduit que l'ensemble des solutions est $\left[-\frac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

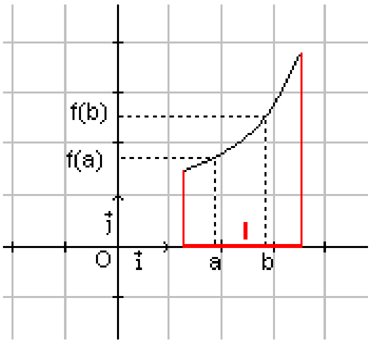
2- Sens de variation d'une fonction

Étudier le sens de variation d'une fonction c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est soit croissante, soit décroissante.

a) Fonctions croissantes

Une fonction f est **croissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **conserve l'ordre** des nombres.
Quels que soient les réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

Graphiquement, la courbe représentative de f «monte» sur l'intervalle I.

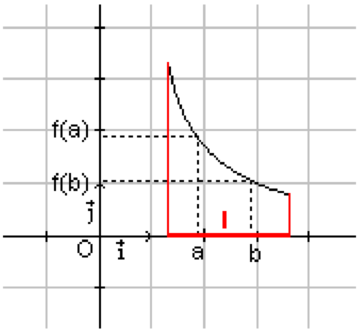


La fonction f est croissante sur I.
La courbe monte.
Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ augmentent aussi : f conserve l'ordre des nombres.

b) Fonctions décroissantes

> Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle I lorsqu'elle **inverse** l'ordre des nombres.
> Quels que soient les réels a et b de I, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

Graphiquement, la courbe représentative de f «descend» sur l'intervalle I.



La fonction f est décroissante sur I.
La courbe descend.
Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de $f(x)$ diminuent : f inverse l'ordre des nombres.

Un exemple

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=\frac{5-2x}{3}$.

En regardant la représentation graphique de f fournie par une calculatrice on peut constater que f est une fonction décroissante. Démontrons le.
Pour cela considérons deux réels a et b tels que $a \leqslant b$ et comparons $f(a)$ et $f(b)$.
On part de $a \leqslant b$.
On multiplie par –2, d'où : $-2a \geqslant -2b$.
On ajoute 5, d'où : $5 - 2a \geqslant 5 - 2b$.
On multiplie par $\frac{1}{3}$, d'où $\frac{5-2a}{3} \geqslant \frac{5-2b}{3}$.
Finalement $f(a) \geqslant f(b)$. L'ordre des nombres a et b a été inversé, la fonction f est donc décroissante.

B. Fonctions de référence

1- Fonctions affines

Une fonction f est une fonction affine s'il existe deux réels a et b tels que pour tout réel x,

$$f(x) = ax + b.$$

Elle est définie sur ℝ.

Sa représentation graphique est la droite d'équation $y = ax + b$. (le réel a est appelé coefficient directeur de la droite, le réel b est appelé ordonnée à l'origine (image de 0)).
Si $a = 0$, f est une fonction constante. Pour tout réel x, $f(x) = b$. La représentation graphique de f est une droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses du repère).
Si $a \neq 0$, f s'annule pour $x = -\frac{b}{a}$.

Sens de variation
On distingue les deux cas suivants :

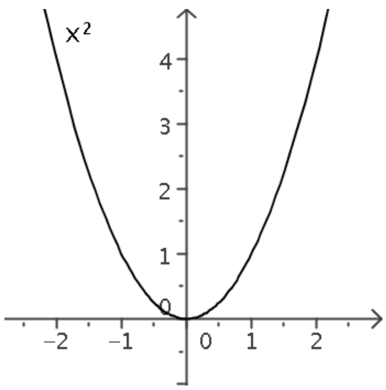
Si $a > 0$, f est une fonction croissante.	Si $a < 0$, f est une fonction décroissante.
$\begin{array}{c\|ccc} x & & -b/a & \\ \hline f(x) & \nearrow & 0 & \nearrow \end{array}$	$\begin{array}{c\|ccc} x & & -b/a & \\ \hline f(x) & \searrow & 0 & \searrow \end{array}$

Démonstration

On considère la fonction affine f définie par $f(x) = ax + b$ et deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.
Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
Si $a > 0$. On a $x_1 < x_2$, en multipliant par a on obtient $ax_1 < ax_2$, et en ajoutant b on trouve $ax_1 + b < ax_2 + b$, soit $f(x_1) < f(x_2)$; l'ordre est conservé, f est donc croissante.
Si $a < 0$. On a $x_1 < x_2$, en multipliant par a on obtient $ax_1 > ax_2$ (car a négatif) et en ajoutant b on trouve $ax_1 + b > ax_2 + b$, soit $f(x_1) > f(x_2)$; l'ordre est inversé, f est donc décroissante.

2- Fonction carré

Il s'agit de la fonction qui transforme tout réel x en x^2. C'est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.



Sens de variation

$$\begin{array}{c|ccc} x & & 0 & \\ \hline x^2 & \searrow & 0 & \nearrow \end{array}$$

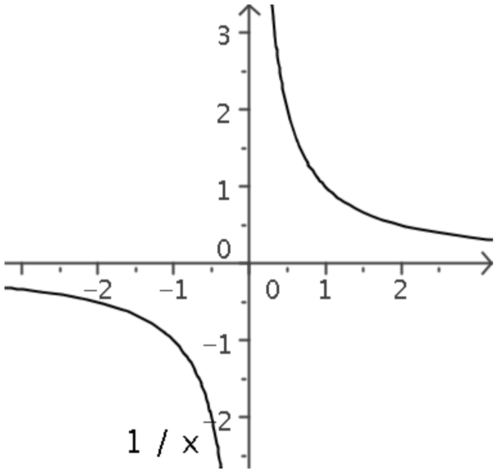
La fonction carrée est décroissante sur]-∞ ; 0] et croissante sur]0 ; +∞].
0 est un minimum : un carré est toujours positif.
La courbe est une parabole.

Démonstration

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^2$ et deux réels x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.
Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$ et pour cela calculons :
$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$.
On sait que $x_1 < x_2$, donc que $x_1 - x_2$ est négatif.
Si x_1 et x_2 sont positifs, alors $x_1 + x_2$ est positif, donc $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ est négatif, soit $f(x_1) < f(x_2)$. f conserve l'ordre sur [0 ; +∞[donc f est croissante sur [0 ; +∞[.
Si x_1 et x_2 sont négatifs, alors $x_1 + x_2$ est négatif, donc $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ est positif, soit $f(x_1) > f(x_2)$. f inverse l'ordre sur]-∞ ; 0] donc f est croissante sur]-∞ ; 0].

3- Fonction inverse

Il s'agit de la fonction qui transforme tout réel non nul x en $\frac{1}{x}$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$ (on ne peut pas diviser par 0). C'est une fonction impaire.



Sens de variation

x		0	
$1/x$	↘	‖	↘

La fonction inverse est décroissante sur
]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[.
La courbe est une hyperbole.

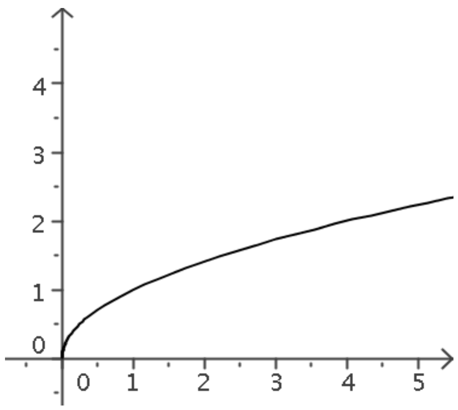
Démonstration
On considère la fonction f définie par $f(x) = 1/x$ et deux réels non nuls x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.
Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$ et pour cela calculons :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} .$$

Comme $x_1 < x_2$, on sait que $x_2 - x_1$ est positif.
Si x_1 et x_2 ont le même signe, alors $x_1\, x_2$ est positif aussi, donc $f(x_1) - f(x_2)$ est positif.
Ainsi, si x_1 et x_2 sont dans]-∞ ; 0[ou dans]0 ; +∞[on a $f(x_1) > f(x_2)$, l'ordre est inversé donc f est décroissante sur]-∞ ; 0[et sur]0 ; +∞[.

4- Fonction racine carrée

Il s'agit de la fonction qui transforme tout réel positif x en $\sqrt{x}$. Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^+$ = [0; +∞[. $\sqrt{x}$ est le réel positif dont le carré est égal à x.



Sens de variation

x	0	
$\sqrt{x}$		↗

La courbe est une demi-parabole.

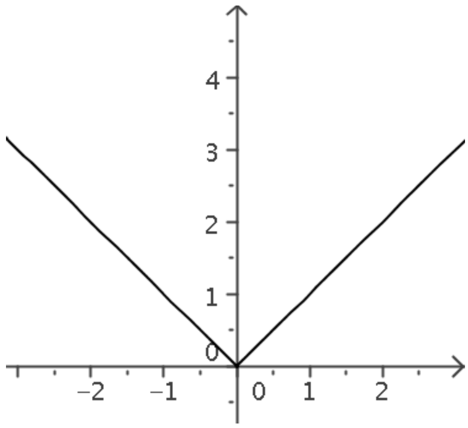
Démonstration
On considère la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ et deux réels positifs x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$.
Comparons $f(x_1)$ et $f(x_2)$ et pour cela calculons :

$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} = \dfrac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} = \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}$.

Comme $x_1 < x_2$, on sait que $x_1 - x_2$ est négatif. D'autre part $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ est positif. On a donc $f(x_1) - f(x_2)$ négatif, soit $f(x_1) < f(x_2)$. f conserve l'ordre sur $[0 ; +\infty[$ donc f est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

5- Fonction valeur absolue.

Il s'agit de la fonction qui transforme tout réel x en $|x|$. C'est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.
Si $x \geqslant 0$, $|x| = x$; si $x < 0$, $|x| = x$.



Sens de variation

x		0	
$\lvert x \rvert$	↘	0	↗

La courbe est formée de deux demi-droites issues des droites d'équation $y = x$ et $y = -x$.

Démonstration
Sur $[0 ; +\infty[$ la fonction valeur absolue coïncide avec la fonction affine f_1 définie par $f_1(x) = x$ qui est croissante et sur $]-\infty ; 0]$ elle coïncide avec la fonction affine f_2 définie par $f_2(x) = -x$ qui est décroissante.