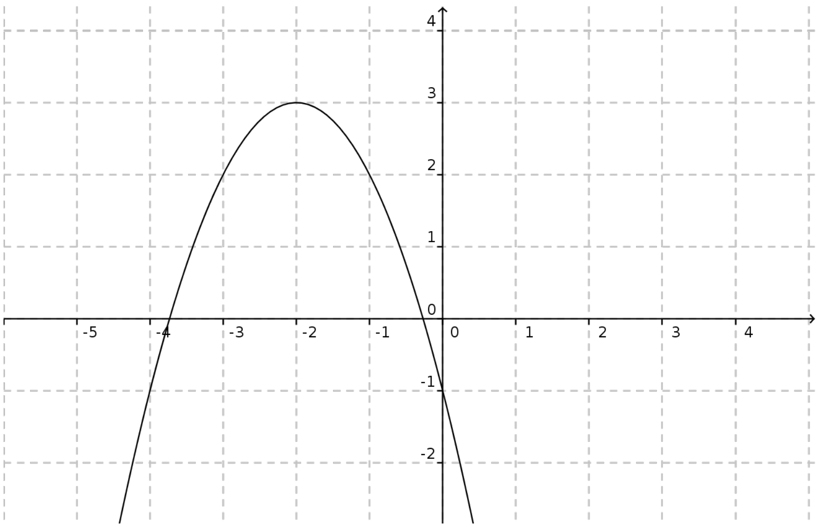
Devoir de Mathématiques

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
1- Donner la forme canonique de $f(x)$. En déduire le tableau de variation de f.
2- Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.
3- Résoudre l'inéquation $f(x) < \frac{9}{2}$.

Exercice 2



La figure donne la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont 3 nombres réels.
1- Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique pour justifier.
a) Quel est le signe de a ? Quel est le signe de $b^2 - 4ac$?
b) La forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Quelles sont les valeurs de α et β ?
c) Quelle est la valeur de $f(0)$? En déduire la valeur de a.

2- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 3

Le triangle de dimensions 3, 4 et 6 n'est pas un triangle rectangle.
Peut-on en ajoutant une même longueur x à ses trois côtés obtenir un triangle rectangle ?

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère, on considère l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite D d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.
1- Dessiner l'hyperbole H et la droite D. On appelle A et B les deux points d'intersection. Lire les coordonnées de A et B sur la figure.
2- Démontrer que les nombres x_A et x_B sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$. En déduire les valeurs exactes de x_A et x_B.
3- Comparer les résultats obtenus par lecture graphique à ceux obtenus par le calcul.

Correction

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.
1- Donner la forme canonique de $f(x)$. En déduire le tableau de variation de f.

> La forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha=\frac{-b}{2a}$ et $\beta=c-\frac{b}{4a}$.
>
> Ainsi $\alpha=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{4}=-1$ et $\beta=c-\frac{b^2}{4a}=-6-\frac{16}{8}=-8$.
>
> On a donc $f(x)=2(x+1)^2-8$ et le tableau de variation suivant :
>
> | x | -∞ | | -1 | | $+\infty$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f(x)$ | | ↘ | -8 | ↗ | |

2- Résoudre l'équation $f(x) = 0$. En déduire la forme factorisée de $f(x)$.

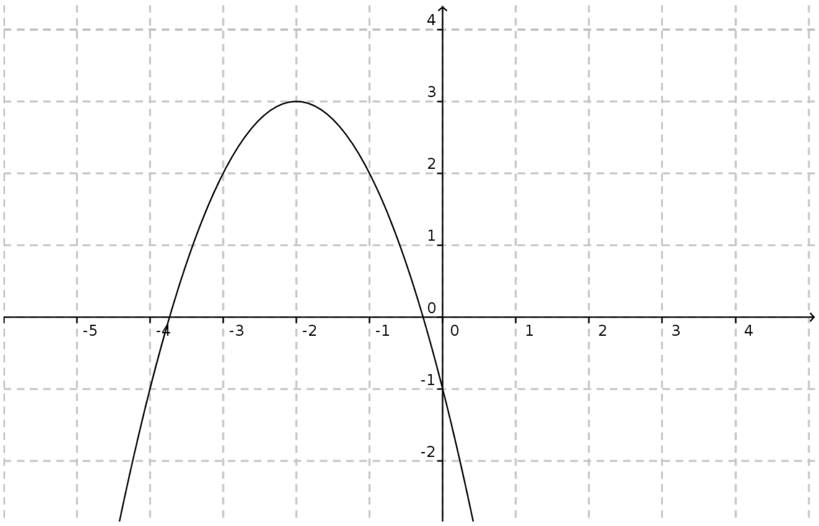
> Le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 48 = 64$. L'équation a donc deux solutions qui sont $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+8}{4}=1$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-8}{4}=-3$
>
> On en déduit que $f(x) = 2(x-1)(x+3)$

3- Résoudre l'inéquation $f(x)<\frac{9}{2}$.

> $f(x)<\frac{9}{2} \Leftrightarrow 2x^2+4x-6-\frac{9}{2}<0 \Leftrightarrow 2x^2+4x-\frac{21}{2}<0$.
>
> Étudions le signe du trinôme $2x^2+4x-\frac{21}{2}$. $\Delta = b^2 - 4ac = 16 + 84 = 100$. On a donc 2 racines $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4+10}{4}=\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-4-10}{4}=\frac{-7}{2}$. Un trinôme est du signe de a sauf entre les racines, donc $2x^2+4x-\frac{21}{2}$ est négatif entre les racines et l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]\frac{-7}{2};\frac{3}{2}\right[$

Exercice 2

La figure donne la représentation graphique de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont 3 nombres réels.



1- Répondre aux questions suivantes en utilisant le graphique pour justifier.

a) Quel est le signe de a ? Quel est le signe de $b^2 - 4ac$?

> La parabole présente un maximum donc a est négatif. D'autre part elle coupe l'axe des abscisses en deux points donc Δ est positif.

b) La forme canonique de $f(x)$ est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Quelles sont les valeurs de α et β ?

> La position du maximum indique que $\alpha = -2$ et $\beta = 3$.

c) Quelle est la valeur de $f(0)$? En déduire la valeur de a.

> On a $f(0) = -1$. Or $f(0) = c$, donc $c = -1$.
>
> Comme $f(0) = -1$, $a(-\alpha)^2 + \beta = -1$, donc $4a + 3 = -1$ et $a = -1$.
>
> Ainsi $f(x) = -(x + 2)^2 + 3$.

2- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

> $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 3$. On a deux solutions, soit $x + 2 = \sqrt{3}$ donc $x = -2 + \sqrt{3}$,
> soit $x + 2 = -\sqrt{3}$ donc $x = -2 - \sqrt{3}$

Exercice 3

Le triangle de dimensions 3, 4 et 6 n'est pas un triangle rectangle.
Peut-on en ajoutant une même longueur x à ses trois côtés obtenir un triangle rectangle ?

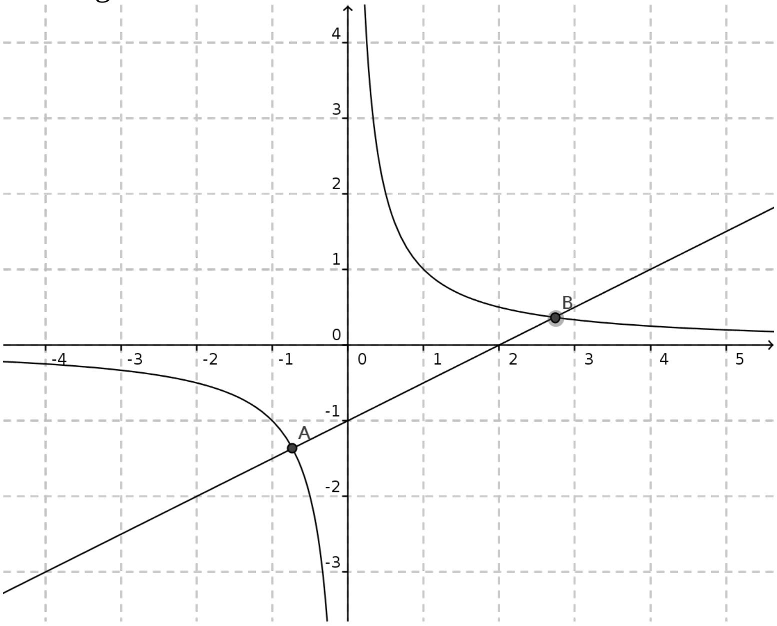
> Les côtés du nouveau triangle mesurent $x+3$, $x+4$ et $x+6$. Pour que ce soit un triangle rectangle, il faut que $(x + 6)^2 = (x + 4)^2 + (x + 3)^2$,
>
> soit $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 8x + 16 + x^2 + 6x + 9$,
>
> soit $x^2 + 2x - 11 = 0$.
>
> Le discriminant est $\Delta = 4 + 44 = 48$. On a donc deux solutions :
>
> $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-\sqrt{48}}{2} = \frac{-2-4\sqrt{3}}{2} = -1-2\sqrt{3}$ et
> $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+\sqrt{48}}{2} = \frac{-2+4\sqrt{3}}{2} = -1+2\sqrt{3}$. Comme x doit être positif, la seule solution acceptable est $-1+2\sqrt{3}$.

Exercice 4

Dans le plan muni d'un repère, on considère l'hyperbole H d'équation $y = \frac{1}{x}$ et la droite D

d'équation $y = \frac{x}{2} - 1$.

1- Dessiner l'hyperbole *H* et la droite *D*. On appelle A et B les deux points d'intersection. Lire les coordonnées de A et B sur la figure.



On peut lire $x_A \approx -0{,}7$ et $x_B \approx 2{,}7$.

2- Démontrer que les nombres x_A et x_B sont solutions de l'équation $x^2 - 2x - 2 = 0$. En déduire les valeurs exactes de x_A et x_B.

x_A et x_B. sont différents de 0 et solutions de $\frac{1}{x} = \frac{x}{2} - 1$. En multipliant par $2x$ on obtient $2 = x^2 - 2x$, soit $x^2 - 2x - 2 = 0$. On a $\Delta = 4+8 = 12$, il y a donc deux solutions :

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{12}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2} = 1+\sqrt{3}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{12}}{2} = \frac{2-2\sqrt{3}}{2} = 1-\sqrt{3}$.

3- Comparer les résultats obtenus par lecture graphique à ceux obtenus par le calcul.

$x_1 = 1+\sqrt{3} \approx 2{,}732$ et $x_2 = 1-\sqrt{3} \approx 0{,}732$.

x_1 correspond à x_B et x_2 correspond à x_A.