Coordonnées

A. Repères et coordonnées

1- Sur une droite

Soient O un point et $\vec{i}$ un vecteur non nul d'une droite. $(O, \vec{i})$ est alors un repère de cette droite.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de la droite, il existe un unique réel x tel que $\vec{u} = x\vec{i}$.
x est la coordonnée (aussi appelée abscisse) de $\vec{u}$. On écrit $\vec{u}(x)$.
Pour tout point M de la droite, il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.
x est la coordonnée de M.

2- Dans un plan

Soient O un point, $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires d'un plan. $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est alors un repère de ce plan.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe un couple unique (x, y) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
(x, y) est le couple des coordonnées (abscisse et ordonnée) de $\vec{u}$. On écrit $\vec{u}(x, y)$.
Pour tout point M du plan, il existe un couple unique (x, y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
(x, y) est le couple des coordonnées de M.

3- Dans l'espace

Soient O un point, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace. $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est alors un repère de l'espace.
Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un triplet unique (x, y, z) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
(x, y, z) est le triplet des coordonnées de $\vec{u}$. On écrit $\vec{u}(x, y, z)$.
Pour tout point M de l'espace, il existe un triplet unique (x, y, z) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.
(x, y, z) est le triplet des coordonnées de M.

B. Propriétés générales

1- Opérations sur les vecteurs

> L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
> Soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{u'}(x', y', z')$ deux vecteurs et k un réel.
> On a alors $\vec{u} + \vec{u'}(x + x', y + y', z + z')$ et $k\vec{u}(kx, ky, kz)$.

2- Vecteur défini par deux points

> L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
> Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points.

On a alors $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

Démonstration

On a $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $x_B - x_A$, $y_B - y_A$ et $z_B - z_A$.

3- Milieu d'un segment

L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points.

Le milieu du segment [AB] a pour coorodonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Les coordonnées du milieu d'un segment sont les moyennes des coordonnées de ses extrémités.

Démonstration

Si M est le milieu de [AB], on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\ \overrightarrow{OM}$, soit $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ ce qui donne les coordonnées indiquées pour M.

4- Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est sa longueur lorsqu'une unité a été fixée.

- Si A et B sont deux points, on a $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$.
- Pour tout réel k, $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$.

On peut, dans certaines conditions, calculer la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées.

Sur une droite

Sur une droite munie d'un repère normal $(O, \vec{i})$, c'est à dire tel que $\|\vec{i}\| = 1$, pour tout vecteur $\vec{u}(x)$, on a $\|\vec{u}\| = |x|$.

Dans un plan

Dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, c'est à dire tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ orthogonaux, pour tout vecteur $\vec{u}(x, y)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, c'est à dire tel que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ avec $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ orthogonaux deux à deux, pour tout vecteur $\vec{u}(x, y, z)$, on a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

C. Equations de droites et de cercles dans le plan

1- Droites

Soient u, v et w trois réels, u et v n'étant pas nuls en même temps.

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $ux + vy + w = 0$ est une droite.

- Si $v = 0$, l'équation $ux + vy + w = 0$ peut se ramener à la forme réduite $x = c$; on a une droite parallèle à l'axe des ordonnées donc de vecteur directeur $\vec{j}$.
- Si $v \neq 0$, l'équation $ux + vy + w = 0$ peut se ramener à la forme réduite $y = ax + b$; on a une droite de vecteur directeur $\vec{u}(1,\ a)$.

Exemple
Déterminer l'ensemble E des points $M(x, y)$ du plan vérifiant l'équation $x + 2y - 6 = 0$.
Comme $x + 2y - 6 = 0$, on a $2y = -x + 6$ et donc $y = -\frac{1}{2}x + 3$. L'ensemble E est donc la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

Rappels
Soit D une droite d'équation $y = ax + b$.
- a est appelé coefficient directeur (le vecteur directeur a comme coordonnées $(1, a)$)
- b est appelé ordonnée à l'origine (la droite passe par le point de coordonnées $(0, b)$)
- si la droite passe par les points $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ avec $x_B \neq x_A$, son coefficient directeur est $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

2- Cercles

> On appelle cercle de centre Ω et de rayon R l'ensemble des points M du plan tels que $\Omega M = R$.
> Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est l'ensemble des points $M(x, y)$ vérifiant l'équation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Démonstration
Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$ sont $(x - a, y - b)$, donc $\Omega M^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$. L'ensemble des points M tels que $\Omega M = R$ est aussi l'ensemble des points M tels que $\Omega M^2 = R^2$ donc tels que $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Exemple
Déterminer l'ensemble E des points $M(x, y)$ du plan vérifiant l'équation $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.
$x^2 + y^2 - 2x + 4y = x^2 - 2x + y^2 + 4y = (x - 1)^2 - 1 + (y + 2)^2 - 4 = (x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 5$.
E est donc l'ensemble des points vérifiant $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 - 5 = 0$ soit $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$.
C'est donc le cercle de centre $(1; -2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.