

Angles et trigonométrie

A Le radian

Le radian est l'unité de mesure d'angle pour laquelle un angle plat a une mesure égale à π .

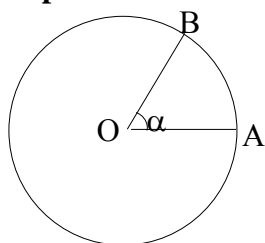
Conversion degrés-radians

Si la mesure d'un angle est a en degré et α en radians, alors $\alpha = \frac{\pi a}{180}$.

Valeurs remarquables

degrés	0	30	45	60	90	180
radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Propriété



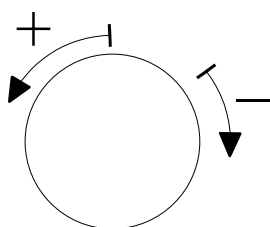
Soient A et B deux points d'un cercle de centre O et de rayon r tels que la mesure de l'angle géométrique \widehat{AOB} en radians soit α .

La longueur de l'arc AB est égale à αr .

Rappel : la longueur du cercle est $2\pi r$.

B Angles orientés

1. Orientation du plan

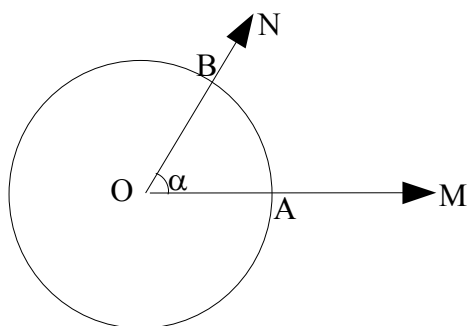


Sur un cercle, deux sens de parcours sont possibles :

- le sens positif (ou sens direct ou sens trigonométrique)
- le sens négatif (ou sens indirect ou sens des aiguilles d'une montre)

2. Mesures des angles orientés

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. Le couple (\vec{u}, \vec{v}) forme un angle orienté.



Soient O , M et N trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$. Soit C le cercle de centre O et de rayon 1 qu'on appelle cercle trigonométrique.

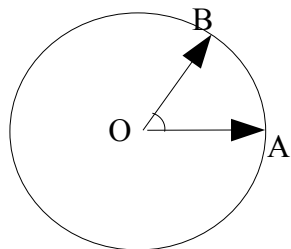
La demi-droite $[OM)$ coupe C en A .

La demi-droite $[ON)$ coupe C en B .

On obtient une mesure de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) , en calculant la longueur parcourue sur le cercle pour aller de A à B et en lui donnant un signe représentant le sens de parcours.

Si la mesure en radians de \widehat{AOB} est α , les mesures de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) sont de la forme $\alpha + 2k\pi$ ou $-\alpha + 2k\pi$ selon le sens de parcours pour aller de A à B, k étant un entier relatif.

Exemple



OAB est un triangle équilatéral.

La mesure de \widehat{AOB} en radians est donc $\frac{\pi}{3}$.

L'angle orienté (\vec{OA}, \vec{OB}) admet comme mesures $\frac{\pi}{3}$, ou

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3} \text{ ou } \frac{\pi}{3} - 2\pi = \frac{-5\pi}{3}, \dots$$

L'angle orienté (\vec{OB}, \vec{OA}) admet comme mesures $\frac{-\pi}{3}$, ou $\frac{-\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$ ou

$$\frac{-\pi}{3} - 2\pi = \frac{-7\pi}{3}, \dots$$

3. Mesure principale d'un angle orienté

Parmi toutes les mesures d'un angle orienté, une seule se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$; elle est appelée mesure principale de l'angle orienté.

Si α est la mesure principale de l'angle orienté (\vec{OA}, \vec{OB}) , alors $|\alpha|$ est la mesure en radian de l'angle géométrique \widehat{AOB} .

Exemple

Trouver la mesure principale d'un angle dont l'une des mesures est $\frac{11\pi}{3}$.

Comme $\frac{11\pi}{3} > \pi$, on retire des multiples de 2π jusqu'à obtenir un résultat contenu dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

$$\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2 \times 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{3} + 2 \times 2\pi.$$

Comme $\frac{-\pi}{3}$ se trouve dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$, il s'agit de la mesure principale de l'angle.

4. Propriétés des angles orientés

Angles et vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement si la mesure principale de l'angle orienté (\vec{u}, \vec{v}) est égale à 0 ou à π .

Si cette mesure est 0, les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont le même sens, il existe un réel positif k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Si cette mesure est π , les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont des sens opposés, il existe un réel négatif k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Relation de Chasles

Quels que soient les vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

Conséquences :

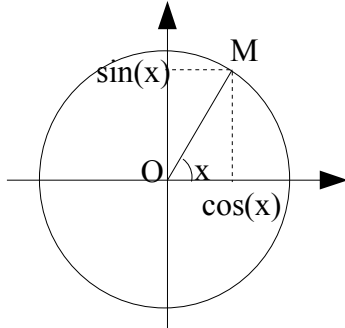
$$(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}); (\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi; (-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi; (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}).$$

C Sinus et cosinus d'un angle orienté

1. Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

On considère le cercle trigonométrique, cercle de centre O et de rayon 1.

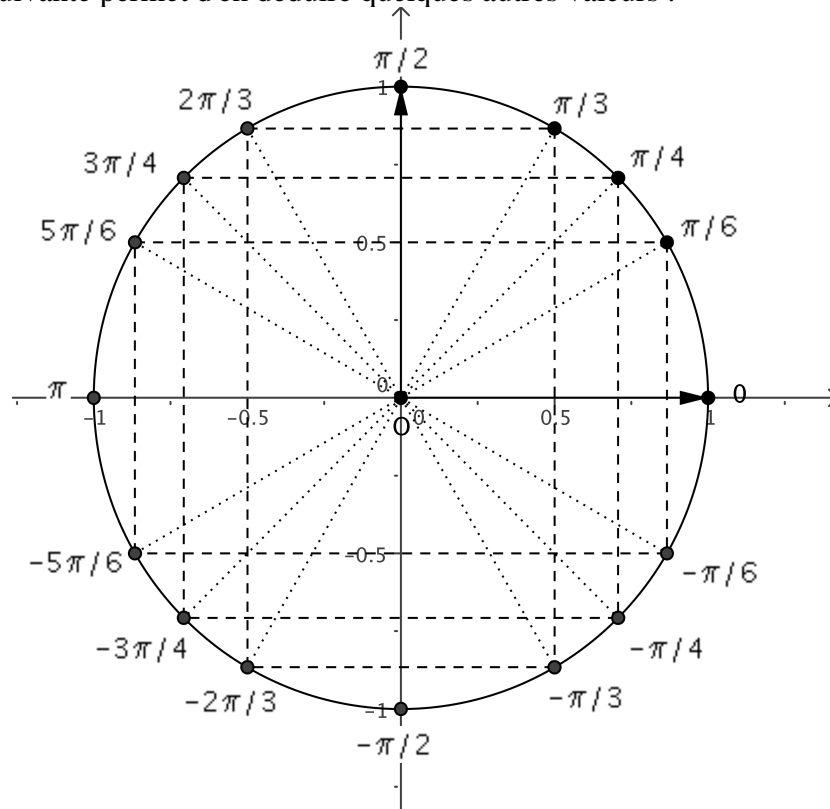


A tout réel x , on associe le point M du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
On appelle alors **cos(x)** l'abscisse du point M et **sin(x)** l'ordonnée du point M.

2. Valeurs remarquables

angle	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cosinus	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sinus	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

La figure suivante permet d'en déduire quelques autres valeurs :

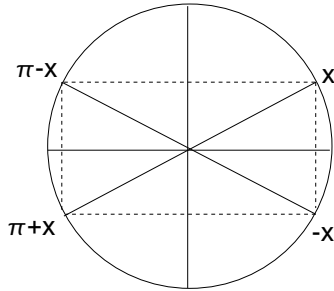


3. Propriétés

Pour tout réel x , on a les propriétés suivantes :

- $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$
- $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

La figure suivante permet de retrouver rapidement quelques autres formules :



- a) $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$
- b) $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- c) $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ et $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$

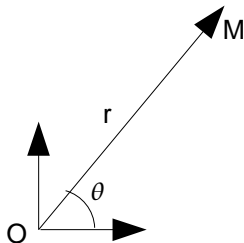
D'autre part,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x).$$

D Coordonnées polaires d'un point

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) direct; on a $(\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}$.

1. Définition



Pour tout point M distinct de O , un couple (r, θ) tel que $OM = r$ et $(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta$ est un couple de coordonnées polaires de M .

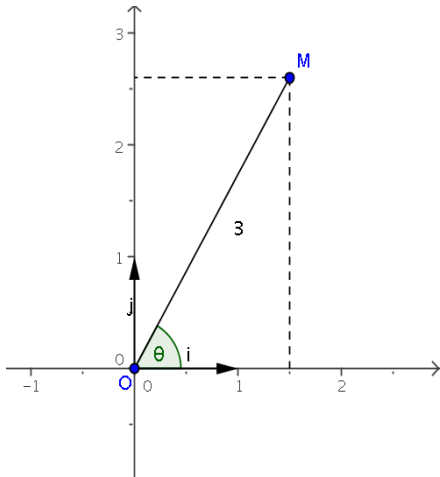
2. Lien entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes

Soit M un point de coordonnées cartésiennes (x, y) et de coordonnées polaires (r, θ) .

On a les trois égalités suivantes :

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $x = r \cdot \cos(\theta)$ ou $\cos(\theta) = \frac{x}{r}$
- $y = r \cdot \sin(\theta)$ ou $\sin(\theta) = \frac{y}{r}$

Exemple 1



Le point M a $\left(3, \frac{\pi}{3}\right)$ comme coordonnées polaires.

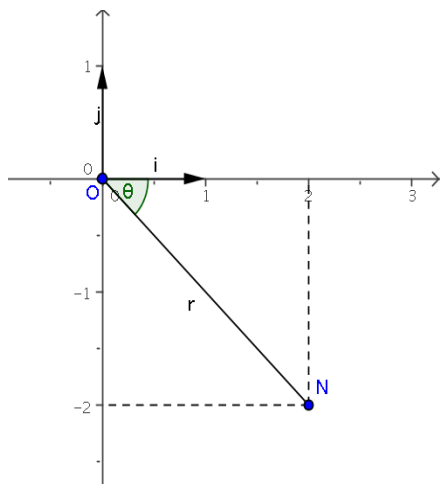
Quelles sont ses coordonnées cartésiennes ?

$$\text{On a } x = 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\text{et } y = 3 \times \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Les coordonnées cartésiennes de M sont donc $\left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

Exemple 2



Le point N a $(2, -2)$ comme coordonnées cartésiennes.
Quelles sont ses coordonnées polaires ?

$$\text{On a } r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Ainsi } \cos(\theta) = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$\sin(\theta) = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}. \text{ On en déduit que } \theta = \frac{-\pi}{4}.$$

Les coordonnées polaires de N sont donc $\left(2\sqrt{2}, \frac{-\pi}{4}\right)$.