Croissance et suites

A. Types de croissance

On considère une grandeur G qui évolue dans le temps et qu'on mesure à intervalles réguliers.

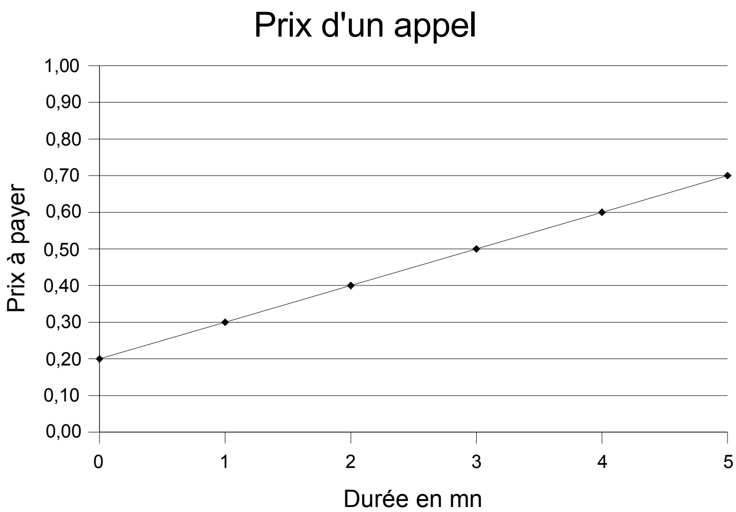
1- Croissance linéaire

> Si on passe d'une mesure de G à la suivante en ajoutant toujours une même valeur, on dit que G suit une croissance linéaire.

Exemple
Pour un appel téléphonique on paie une part fixe de 0,20€, puis 0,10€ par minute.
Le prix à payer suit une croissance linéaire : à chaque minute supplémentaire il augmente de 0,13€.
Représentons graphiquement cette évolution.
On commence par remplir un tableau de valeurs :

Durée en mn	0	1	2	3	4	5
Prix en €	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70

Puis on construit le graphique :



Propriété
La représentation graphique d'une grandeur qui suit une croissance linéaire est une droite.

Remarque
Lorsque la grandeur diminue à chaque mesure d'une même valeur, on dit aussi qu'elle suit une décroissance linéaire.

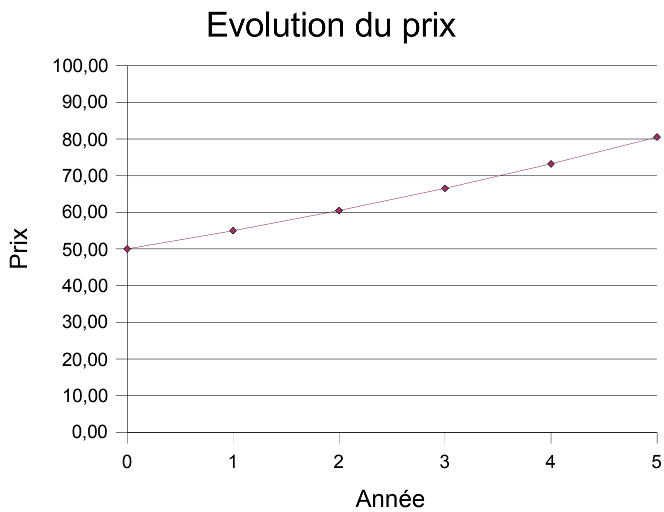
2- Croissance exponentielle

> Si on passe d'une mesure de G à la suivante en multipliant à chaque fois par un même nombre, on dit que G suit une croissance exponentielle.

Exemple
Le prix d'un article augmente de 10% tous les ans. Cela signifie que chaque année il est multiplié par 1,1; il suit donc une croissance exponentielle.
Construisons la représentation graphique de ce prix avec une valeur de départ de 50€.
On commence par remplir un tableau de valeur :

Année	0	1	2	3	4	5
Prix en €	50,00	55,00	60,50	66,55	73,21	80,53

Puis on construit le graphique :



Dans ce cas les points ne sont plus alignés. L'augmentation devient de plus en plus rapide.

Remarque
Lorsque la grandeur est multipliée par un nombre inférieur à 1 elle suit une décroissance exponentielle.

3- Autres types de croissance

Il existe évidemment d'autres types de croissance. Par exemple, voyons la distance parcourue par un corps en chute libre.

Durée en secondes	1	2	3	4	5
Distance parcourue	4,9	19,6	44,1	78,5	122,6

Entre les durées 1 et 2, la distance parcourue est 19,6 – 4,9 = 14,7; entre les durées 2 et 3, la distance parcourue est 44,1 – 19,6 = 24,5. Les résultats sont différents, il ne s'agit donc pas d'une croissance linéaire.

Entre les durées 1 et 2, la distance parcourue est multipliée par $\frac{19,6}{4,9}$ = 4; entre les durées 2 et 3, la distance parcourue est multipliée par $\frac{44,1}{19,6}$ = 2,25. Les résultats sont différents, il ne s'agit donc pas d'une croissance exponentielle.

On apprend en physique que le lien entre durée t de la chute et distance parcourue d est donné par la formule $d = \frac{9,81 \times t^2}{2}$.

B. Suites

1- Définition d'une suite

Une suite nommée u_n est la suite des nombres u_0, u_1, u_2, u_3, etc...
On la définit en indiquant comment calculer chaque terme de la suite. On utilise deux modes de définition.

a) Définition en fonction de l'indice n

On peut définir une suite en donnant une formule permettant de calculer le terme général u_n en fonction de n.

Exemple
Considérons la suite u_n définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 + n$.
On aura : $u_0 = 0^2 + 0 = 0$; $u_1 = 1^2 + 1 = 2$; $u_2 = 2^2 + 2 = 6$; $u_3 = 3^2 + 3 = 12$; etc...
Il est ainsi facile de calculer directement n'importe quel terme de la suite.

b) Définition par récurrence

On peut définir une suite u_n en donnant son premier terme u_0, et un moyen de passer d'un terme au suivant, c'est à dire de calculer u_{n+1} lorsqu'on connait u_n.

Exemple
Considérons la suite u_n définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n + 5$.
On aura : $u_1 = 3u_0 + 5 = 3 \times 2 + 5 = 11$,
puis $u_2 = 3u_1 + 5 = 3 \times 11 + 5 = 38$,
puis $u_3 = 3u_2 + 5 = 3 \times 38 + 5 = 119$, etc...

Remarque
On ne peut pas calculer un terme avant d'avoir trouvé les précédents.

2- Suite arithmétique

a) Définition

> Une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en ajoutant un nombre constant appelé raison de la suite.

Autrement dit,

> Une suite u_n est arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier naturel n,
> $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque
Une suite arithmétique a un mode de croissance linéaire.

Exemples
1- Considérons la suite u_n définie par $u_n = n^2 + 1$.
On a $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_2 = 2^2 + 1 = 5$.
Pour passer de u_0 à u_1 on a ajouté $u_1 - u_0 = 2 - 1 = 1$.
Pour passer de u_1 à u_2 on a ajouté $u_2 - u_1 = 5 - 2 = 3$.
Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$ cette suite n'est pas arithmétique.
2- Considérons la suite u_n définie par $u_n = 2n + 3$.
On a $u_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$, $u_1 = 2 \times 1 + 3 = 5$, $u_2 = 2 \times 2 + 3 = 7$.
On passe de u_0 à u_1, puis de u_1 à u_2 en ajoutant 2.
De manière générale : $u_{n+1} - u_n = 2(n + 1) + 3 - (2n + 3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$.
Il s'agit donc d'une suite arithmétique de raison 2.

b) Propriété

> Pour passer du terme u_0 au terme u_n on ajoute n fois la raison r.
> Ainsi, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr$.

Exemple
Soit u_n une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = 10$. Calculer u_{20}.
$u_{20} = u_0 + 20 \times 3 = 10 + 60 = 70$.

3- Suite géométrique

a) Définition

> Une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme au suivant en multipliant par un nombre constant appelé raison de la suite.

Autrement dit,

> Une suite u_n est géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier naturel n,
> $u_{n+1} = qu_n$.

Remarque
Une suite géométrique a un mode de croissance exponentiel.

Exemples
1- Considérons la suite u_n définie par $u_n = n^2 + 1$.
On a $u_0 = 0^2 + 1 = 1$, $u_1 = 1^2 + 1 = 2$, $u_2 = 2^2 + 1 = 5$.
Pour passer de u_0 à u_1 on a multiplié par $\frac{u_1}{u_0} = \frac{2}{1} = 2$.
Pour passer de u_1 à u_2 on a ajouté $\frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.
Comme $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$ cette suite n'est pas géométrique.
2- Considérons la suite u_n définie par $u_n = 2^n$.
On a $u_0 = 2^0 = 1$, $u_1 = 2^1 = 2$, $u_2 = 2^2 = 4$.
Pour passer de u_0 à u_1, puis de u_1 à u_2, on a multiplié par 2.
De manière générale, pour passer de u_n à u_{n+1}, on multiplie par 2 car $2^{n+1} = 2^n \times 2$.

b) Propriété

> Pour passer du terme u_0 au terme u_n on multiplie n fois par la raison q, donc par q^n.
> Ainsi, pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple
Soit u_n une suite arithmétique de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = 2$. Calculer u_4.
$u_{20} = u_0 \times 1{,}5^4 = 2 \times 5{,}0625 = 10{,}125$.